

سلسلة مذكرات

# الإبداع

في الرياضيات

المصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

إعداد /

أ. جميل غالي السيد

مكتبة وسام

ش. ب. ١٠٠ - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية ب. ١١١١

01004423597.3943035

مقرعة

كلمة الطموح تعني إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء،

وكلمة الإبراهيم تعني العيش على القمة وإستنشاق عزة العالی لأنه يرجو وأثما

المعالي لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقة عن جدارة.....

فَارْجُو مِنَ اللَّهِ أَنْ أَكُونَ قَدِمْتَ مَا عَلَى مَنْ خَلَّاهُ هَذَا الْعَمَلُ الْمَتَوَاضِعُ بَيْنَ يَدَيْكُمْ

وَاللّٰهُ اَدْعُوا اَنْ يُّوفِّقَكُمْ اِلٰى مَا تَاْمَلُوْنَ اَنْتُمْ وَوَالِدِيْكُمْ

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز،،

أ/ جمیل غالی السید

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات:

- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نحيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس



**توزيع مقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادي**  
**الفصل الدراسي الأول**

الشهر	الجبر والإحصاء	حساب المثلثات والهندسة
باقي سبتمبر وأكتوبر	<ul style="list-style-type: none"> <li>الوحدة الأولى (العلاقات والدوال) :</li> <li>حاصل ضرب الديكارتى.</li> <li>العلاقات.</li> <li>الدالة (التطبيق).</li> <li>دوال كثير الحدود.</li> <li>الوحدة الثانية (النسبة والتناسب - التغير) :</li> <li>النسبة.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>الوحدة الرابعة (حساب المثلثات) :</li> <li>النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.</li> <li>النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.</li> <li>إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.</li> </ul>
نوفمبر	<ul style="list-style-type: none"> <li>التناسب.</li> <li>التغير الطردى.</li> <li>التغير العكسى.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>الوحدة الخامسة (الهندسة التحليلية) :</li> <li>البعد بين نقطتين.</li> <li>إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة.</li> <li>ميل الخط المستقيم والعلاقة بين ميلى المستقيمين (المتوازيين ، المتعامدين).</li> </ul>
ديسمبر	<ul style="list-style-type: none"> <li>الوحدة الثالثة (الإحصاء) :</li> <li>جمع البيانات.</li> <li>التشتت.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>تابع الخط المستقيم.</li> <li>معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات.</li> </ul>
يناير	تمارين متنوعة وحل نماذج الامتحانات	

# الابداع

في

## الرياضيات

أوه: - الجبر والاحصاء

مكتبة وسام

شؤون شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597 3943035

## الوحدة الأولى :-

# العلاقات والدوال

(١) حاصل ضرب الديكارثي

(٢) العلاقات

(٣) دوال كثيرات الحدود

## اختبار الوحدة

## "الوحدة الأولى"

### (١) حاصل ضرب الديكارتى

#### \* الزوج المرتب :-

ليس  $(P, b)$  زوجًا مرتبًا ، وليس  $P$  بالمستطابق الأول ،  
 ليس  $b$  بالمستطابق الثاني  
 أو ليس  $P$  باليدوية اليمنى ، وليس  $b$  باليدوية اليسرى

ملحوظات :-  
 ①  $(٥٤٢) \neq (٢٤٥)$   $\&$   $(٢٤٣) \neq (٣٤٢)$   
 ②  $٣ \in (٣٤٢)$  ، ولكن  $٣ \notin (٢٤٣)$

③ إذا كان  $(P, b) = (٥٤٢)$  فإنه  $P = ٥$  و  $b = ٤$

مثال ① :-

$$(٤-٥٤٢) = (٥٤٣) \quad ①$$

أوجد قيمة  $b$  إذا كان

$$(٢-٤٤) = (٥٤٢٧) \quad ②$$

الحل

$$\boxed{٣=P} \Leftrightarrow P=٣ \therefore$$

$$(٤-٥٤٢) = (٥٤٣) \therefore ①$$

$$\boxed{٩=b} \Leftrightarrow ٩+b=٥ \Leftrightarrow ٩-b=٥ \therefore$$

$$\boxed{١٦=P} \Leftrightarrow ٤ = P \therefore$$

$$(٢-٤٤) = (٥٤٢٧) \therefore ②$$

$$\boxed{٧=b} \Leftrightarrow (٢٤) \quad ٣ = ٥ + b \therefore$$

\* \* \*  
 \* ترتيب \*  
 \* \* \*

أوجد قيمة  $b$  إذا كان

$$(٩٤٣) = (٥٤٢٧+٥) \quad ① \quad \& \quad (٣-٤٤) = (١-٥٤٢-P) \quad ②$$

أولاً :- حاصل ضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين ومثله :-تعريف :- إذا كان  $S$  من مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين فإنه :-

$$① \quad S \times S = A = (P(S)) : P(S) = S \cup \emptyset \quad S \neq \emptyset$$

معناه :- جميع الأزواج المرتبة التي مستطوعها <sup>الأول</sup> عنصر ينتمي إلى  $S$  ومستطوعها الثاني عنصر ينتمي إلى  $S$ .

$$② \quad S \times S = A = (P(S)) : P(S) = S \cup \emptyset \quad S \neq \emptyset$$

معناه :- جميع الأزواج المرتبة التي مستطوعها الأول عنصر ينتمي إلى  $S$  ومستطوعها الثاني عنصر ينتمي إلى  $S$ .

يكتب أنه تكتب  $S$   
وتقرأ "  $S$  اثنين "

$$③ \quad S \times S = A = (P(S)) : P(S) = S \cup \emptyset \quad S \neq \emptyset$$

معناه :- جميع الأزواج المرتبة والتي كلاهما مستطوعها الأول والثاني عناصر تنتمي إلى  $S$ .

مثال :- يكتب تمثيل حاصل ضرب الديكارتي بالخط السهمي أو المخطط البياني

$$\text{مثال :- إذا كان } S = \{1, 2, 3\} \quad S \times S = A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\begin{array}{lll} ① \quad S \times S & ② \quad S \times S & ③ \quad S \times S \\ \text{مثل } S \times S \text{ من المخطط أعلاه وأخرى...} & \text{مثل } S \times S \text{ من المخطط أعلاه وأخرى...} & \text{مثل } S \times S \text{ من المخطط أعلاه وأخرى...} \end{array}$$

$$① \quad S \times S = A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$② \quad S \times S = A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\text{مثال :- لا حظ أن } S \times S \neq S \times S$$





⑤  $\therefore \text{سـ} - \text{ص} = \text{أ}^3$  "الضامر الموجودة في س وغير موجودة في ص"  
 $\therefore (\text{س} - \text{ص}) \times \text{أ}^3 = \text{أ}^3 \times \text{أ}^3 = \text{أ}^6$   $\therefore \text{أ}^6 = (\text{س} - \text{ص}) \times \text{أ}^3$

⑥  $\therefore \text{سـ} - \text{ص} = \text{أ}^3$   $\therefore \text{ع} - \text{ص} = \text{أ}^2$   
 $\therefore (\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ع} - \text{ص}) = \text{أ}^3 \times \text{أ}^2 = \text{أ}^5$   $\therefore \text{أ}^5 = (\text{ع} - \text{ص}) \times (\text{س} - \text{ص})$

مثال ④  $\therefore$  افتر الإجابة الصحيحة  $\therefore$

① إذا كان سـ =  $\text{أ}^2$  فإن سـ =  $\text{أ}^2$  .....  
 $[\text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2, \text{أ}^2]$

②  $\text{ص} \times \text{ع} = \text{أ}^6$  .....  
 $[\text{ص}, \text{ع}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ص}, \text{ع}]$

③  $\text{أ}^3 \times \text{أ}^3 = \text{أ}^6$  .....  
 $[\text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3, \text{أ}^3]$

④ إذا كان  $\text{ص} = (\text{س})^2 = 3^2 = 9$   $\text{ع} = (\text{ص})^2 = 9^2 = 81$   
 $[\text{س}, \text{ع}, \text{س}, \text{ع}, \text{س}, \text{ع}, \text{س}, \text{ع}, \text{س}, \text{ع}]$  فإن  $\text{ص} = (\text{س})^2 = 9$

الخطوة  $\therefore$

①  $\text{أ}^2 (2, 4) = \text{أ}^2 (3, 6) = \text{أ}^2 (4, 8) = \text{أ}^2 (5, 10) = \text{أ}^2 (6, 12) = \text{أ}^2 (7, 14) = \text{أ}^2 (8, 16) = \text{أ}^2 (9, 18) = \text{أ}^2 (10, 20)$

تأريخ على "ماصل بضرب لربحارتى لاجبر عيشة فقرتين وقطله"

① من كل عايات أو جد قيم  $\text{P}$  ب إذا كان  $\therefore$

①  $(9, 0) = (0, \text{P})$  ②  $(2, -6) = (1 + \text{P}, -\text{P})$  ③  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (0, \text{P})$

④  $(1, -6) = (2, -\text{P})$  ⑤  $(1 - \text{P}, -\text{P}) = (2, -\text{P})$  ⑥  $(1, -6) = (16, \text{P})$

⑦  $(\text{P}, 2) = (0, \text{P})$  ⑧  $(\text{P}, 2) = (0, \text{P})$  ⑨  $(\text{P}, 2) = (0, \text{P})$

② إذا كانت  $\text{س} = \text{أ}^2$   $\text{ص} = \text{أ}^3$   $\text{ع} = \text{أ}^4$   $\text{أ}^5 = \text{أ}^5$   $\text{أ}^6 = \text{أ}^6$   $\text{أ}^7 = \text{أ}^7$   $\text{أ}^8 = \text{أ}^8$   $\text{أ}^9 = \text{أ}^9$   $\text{أ}^{10} = \text{أ}^{10}$

ب- بالخط البياني

③ إذا كانت  $\text{س} = \text{أ}^2$   $\text{ص} = \text{أ}^3$   $\text{ع} = \text{أ}^4$   $\text{أ}^5 = \text{أ}^5$   $\text{أ}^6 = \text{أ}^6$   $\text{أ}^7 = \text{أ}^7$   $\text{أ}^8 = \text{أ}^8$   $\text{أ}^9 = \text{أ}^9$   $\text{أ}^{10} = \text{أ}^{10}$

1-  $\text{س} \times \text{ص} = \text{أ}^2 \times \text{أ}^3 = \text{أ}^5$   $\text{س} \times \text{ع} = \text{أ}^2 \times \text{أ}^4 = \text{أ}^6$   $\text{ص} \times \text{ع} = \text{أ}^3 \times \text{أ}^4 = \text{أ}^7$   $\text{س} \times \text{أ}^5 = \text{أ}^2 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^7$   $\text{ص} \times \text{أ}^5 = \text{أ}^3 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^8$   $\text{ع} \times \text{أ}^5 = \text{أ}^4 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^9$

١٤ إذا كانت  $س = ٢٦٤٢$  ،  $ص = ٥٧٤٦٣٢$  أوجد :-

١-  $س \times ص$  وشبه بالخط السواء ٢-  $ص (س \times ص)$  ٣-  $(س \times ص) \times ١١$

١٥ إذا كانت  $س \times ص = ١ (١٦١) ، (٣٦١) ، (٥٦١)$  أوجد :-

١-  $س \times ص$  ٢-  $ص \times س$  ٣-  $ص$

١٦ إذا كانت  $س = ١١$  ،  $ص = ٢٦٤٢$  ،  $ع = ٦٦٥٦٦٢$

مثل المجموعات  $س \times ص$  ،  $ص \times ع$  ليجد قدر تم أوجد :-

١-  $س \times ص$  ٢-  $(س \times ص) \times (ص \times ع)$  ٣-  $٢ \times (ص - ع) \times (س \times ص)$

١٧ امل ما يأتي :-

$$\textcircled{1} ٢٦٤٢ \times ٢٥٦٤٢ = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كان } س \times ص = ١ (٦٤٢) ، (٩٦٢) ، (٦٦٣) ، (٩٦٣) ، (٦٤٢) ، (٩٦٢) \text{ أوجد}$$

$$\text{فاصله } س = \dots\dots\dots \text{ فاصله } ص = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{3} \text{ إذا كان } (س - ١١٤١) = (٣ + ٥٧٤٦) \text{ فاصله } ص = ٥٧٤٦ + ٥٧٤٦ = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{4} \text{ إذا كان } (٥٤٣) \times ٢٦٤٢ \times ١٨٦٢ \text{ فاصله } ص = ٩ = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{5} \text{ إذا كان } س = ١٢٦١ ، ص = ٥٧٤٦ ، ع = ٢٦٤٢ \text{ فاصله } (٤٦٣) = \dots\dots\dots$$

$$(س \times ص) ، (ص \times س) ، (س \times ع) ، (ع \times س) \text{ أختبر}$$

$$\textcircled{6} ٢٦٤٢ \times ٢٠٢ = \dots\dots\dots$$

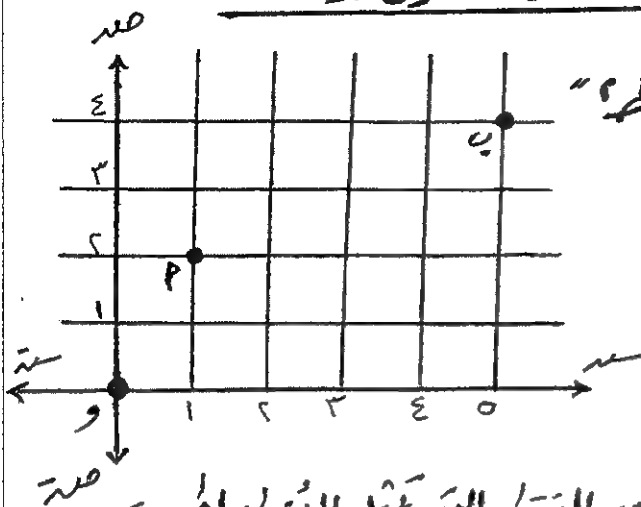
$$\textcircled{7} ٢ (٦٦٣) = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{8} \text{ إذا كان } (س) \times ٣ = (س \times ص) \times ١٢ \text{ فاصله } (ص) = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{9} \text{ إذا كان } ص = ٦٦٥٦٢ \text{ فاصله } (س \times ص) = \dots\dots\dots$$

$$\textcircled{10} \text{ إذا كان } (س) = ٩ \text{ فاصله } (س) = \dots\dots\dots$$

ثانياً: حاصل ضرب الديكارتى للمجموعات غير المنتهية والتحميل البياني له .



III حاصل ضرب الديكارتى "ط x ط" أو "ط<sup>2</sup>"

$$* \text{ط} \times \text{ط} = \text{ط}^2 = (P, P) = P \in \text{ط} \times \text{ط} \Rightarrow \text{ط} \times \text{ط} \neq \text{ط}^2$$

\* تمثل الأعداد الطبيعية على مستقيمين متعامدين

أصداها أفقى من اليمين والأخر رأسى من اليمين

يتقاطعا عند النقطة التي تمثل العدد صفر

على كل منهما أى و (0,0)

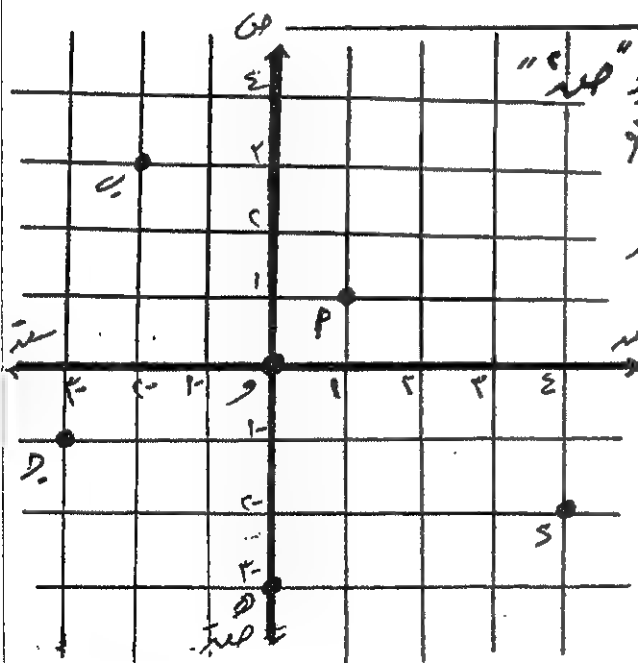
\* نرسم مستقيمتين رأسيه ومستقيمتين أفقية من النقطة التي تمثل الأعداد الطبيعية

على كل من من س<sup>2</sup> و س<sup>2</sup> من ص<sup>2</sup>

\* نحصل على الشبلة التربيعية المقامدة لحاصل ضرب الديكارتى "ط x ط" وكما بالشكل

\* كل نقطة من النقطة على الشبلة التربيعية تمثل زوج مرتب من الحاصل "ط x ط"

مثال: (2,1) P (1,6) B (6,0) C و (0,6) D



IV حاصل ضرب الديكارتى "ص x ص" أو "ص<sup>2</sup>"

$$* \text{ص} \times \text{ص} = \text{ص}^2 = (P, P) = P \in \text{ص} \times \text{ص} \Rightarrow \text{ص} \times \text{ص} \neq \text{ص}^2$$

\* تمثل الأعداد الطبيعية على كل من من س<sup>2</sup> و س<sup>2</sup> من ص<sup>2</sup>

\* نرسم المستقيمتين الرأسية والأفقية من

النقطة والتي تمثل الأعداد الطبيعية

\* نحصل على الشبلة التربيعية المقامدة

لحاصل ضرب الديكارتى "ص x ص"

\* كل نقطة من النقطة على الشبلة التربيعية

تمثل زوج مرتب من الحاصل "ص x ص"

مثال: (1,6) P (6,3) B (3,1) C و (1,0) D

هـ (0,3) و (0,0)

مكتبة وسام

شربين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

أ/ جميل غالي السيد

(6)

الفصل الدراسي الأول

### ١٣١ حاصل ضرب الديكارتي "N x N" أو "N²"

$$N \times N = A = (b, p) = p \in N, b \in N$$

تمثل الأعداد النسبية على كل محور

من ستة ، من ستة ثم نرسم المستقيمت

الرأسيّة والأفقية من النقاط التي

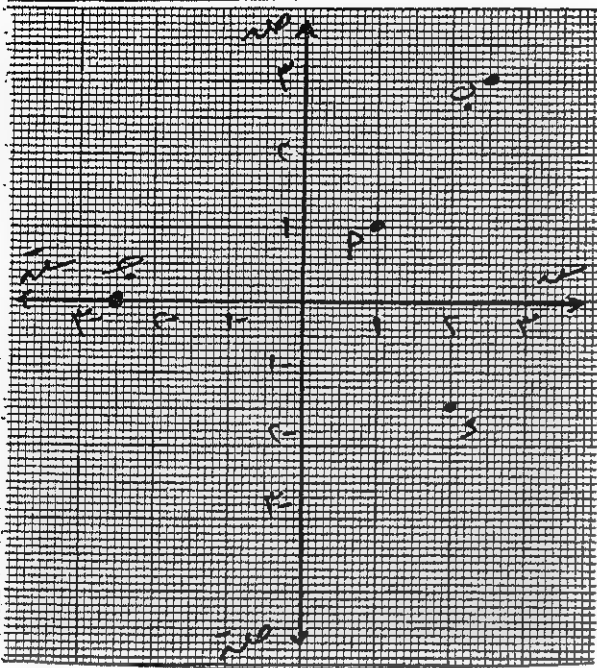
تمثل الأعداد النسبية مع ملاحظة صعوبة

إظهار جميع خطوط الشبكة نظراً

للكثافة الأعداد النسبية .

$$\text{مثال: } P(1, 1) \text{ ، } B(1, \frac{1}{2})$$

$$D(0, \frac{5}{6}) \text{ ، } S(2, \frac{3}{4})$$



### ١٣٢ حاصل الضرب الديكارتي "X x X" أو "X²"

$$X \times X = A = (b, p) = p \in X, b \in X$$

تمثل الأعداد الحقيقية على كل محور من ستة ، من ستة

ثم نقفيل أنشأنا المستقيمت الرأسية

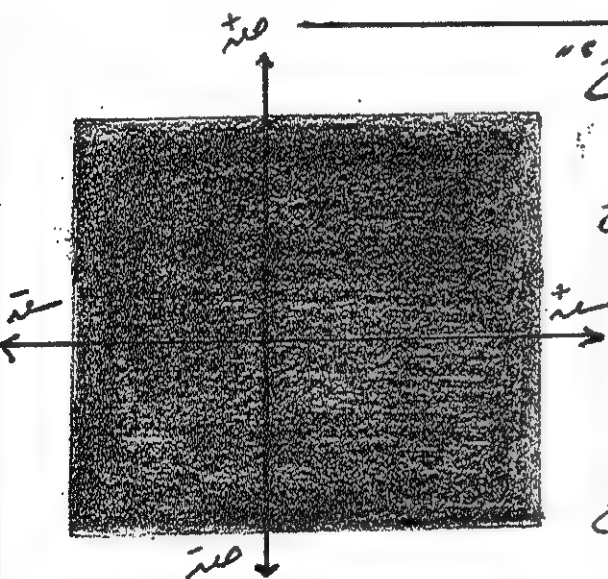
والأفقية التي تمثل الأعداد الحقيقية

وهو عبارة عن سطح منطقت محدودة بلا حدود

من جميع الاتجاهات والنقل المقابل يوضع

جزء من هذه المنطقة

كل نقطة من نقاط هذه الشبكة تمثل أعداداً حاصلة X x X .



ملحوظة هامة :-

المحاور من ستة ، من ستة لقياس المستوي

إلى أربعة أقسام "أرباع" كما بالشكل

\* إذا كان الأعداد السالبة للنقطة = منفر

فإن النقطة تقع على محور الصادات

الربع الأول	الربع الثاني
محور + ، محور +	محور + ، محور -
محور - ، محور +	محور - ، محور -
الربع الثالث	الربع الرابع
محور - ، محور +	محور + ، محور -
محور - ، محور -	محور + ، محور +

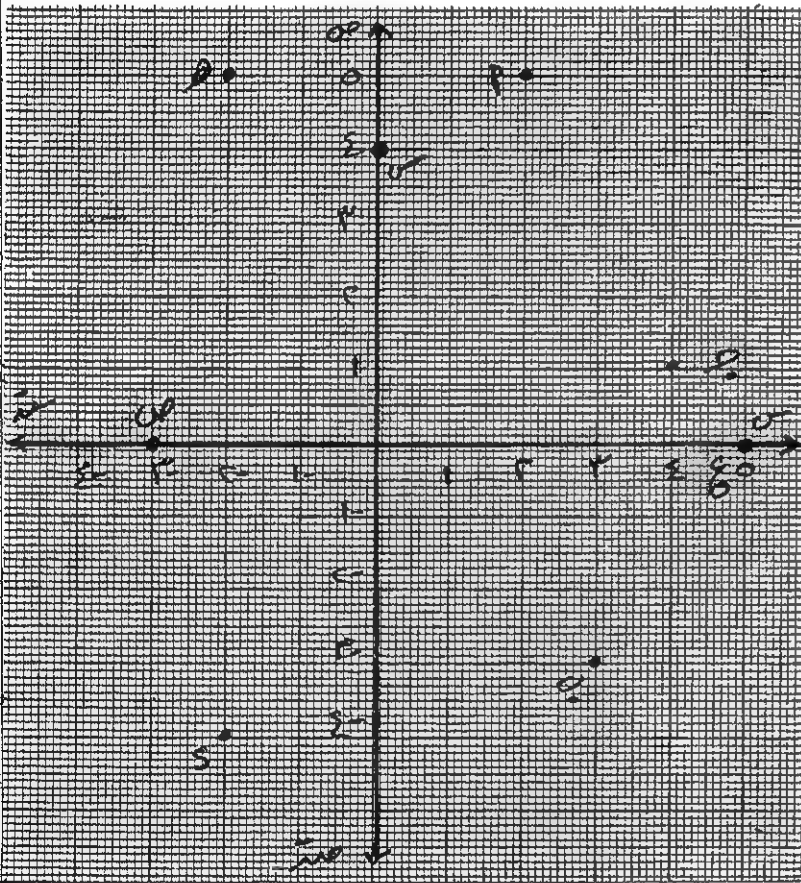
\* إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة = صفر  
فإنه النقطة تقع على محور السينات

مثال: ① أذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تقع عليه كل من النقاط الآتية  
ثم عيّن موضعها على الشبكة القياسية

أ (٥٦٢) ، ب (٣-٦٣) ، ج (١٦٤) ، د (٤-٦٠) ، هـ (٥٦٢-٥٦٢)  
و (٥٦٢-٥٦٢) ، ز (٤٦٠) ، ح (٠-٦٣) ، ط (٠-٦٥)

الحل :-

- أ تقع في الربع الأول .
- ب تقع في الربع الرابع .
- ج تقع في الربع الأول .
- د تقع في الربع الثالث .
- هـ تقع في الربع الثاني .
- و تقع على محور الصادات .
- ز تقع على محور السينات .
- ح تقع على محور السينات .



\*\*\*  
تدريب \*\*\*  
أكمل الجدول التالي :-  
\*\*\*

النقطة	(٥٦٢-٥٦٢)	(١١-٦٣)	(١٦٤, ٤)	(٢١٢-٦٣)	(٥٦٢)	(٠-٦٤)
الربع أو المحور	-----	-----	-----	-----	-----	-----

تأريده على "حاصل بغيره" لإيجاز غير المتشابه وتثيله

المر ما يأتي :-

④ الزوج المرتب (س، ٥٠) حيث س ≠ ٠  
يقع في الربع .....  
⑤ إذا كان (س، ٨٠) = (٥٠، ١٦) = (٥٠، ١٦)  
فإنه س = ..... =

١- (٣٠، ٥) تقع في الربع .....  
٢- (٢٠، ٣) تقع في الربع .....  
٣- إذا كانت (س، ٧) تقع على  
محور الصادات فإنه س + ١ = .....

⑥ اختر الإجابة الصحيحة :-

⑦ إذا كانت النقطة (س، ٤) تقع في الربع الرابع فإنه س = .....  
(٠، ٤، ٢، ٤)  
⑧ إذا كان (س، ٥) تقع في الربع الثالث فإنه (س، ٥) تقع في .....  
(الأول، الثاني، الثالث، الرابع)

١- إذا كان (٨، ٤) تقع على محور  
الصادات فإنه = .....  
(٤، ٨، ٠، ١)  
٢- إذا كان (٣، ٦) تقع على محور  
البيانات فإنه = .....  
(٠، ٦، ٣، ١)

⑨ على شبهة تربية متعامدة للحاصل الديكارتي ح<sub>١</sub> ح<sub>٢</sub> غير النقطة الأتيه :-

١ (٥، ٤) ٢ (٣، ٦) ٣ (٧، ٤) ٤ (٦، ١)  
٥ (٥، ٤) ٦ (٦، ٠) ٧ (٠، ٩)

ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط .

مكتبة  
دار الإبداع  
01004423397 3943025

العلاقاتتعريف العلاقة :-

العلاقة من  $S$  إلى  $T$  هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة .  
 بعض أو كل عناصر  $S$  وهو مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي " $S \times T$ "  
 \* يسمي  $S$  المجال والعلاقة :- هو جميع الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة .

\* من الممثل المقابل :-  
 $S = \{1, 2, 3, 4\}$   $T = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$   
 \* العلاقة من  $S$  إلى  $T$  : علاقة من  $S$  إلى  $T$   
 \*  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$   
 \* يسمي  $S$  المجال والعلاقة :- يسمي  $S$  المجال والعلاقة :-  
 \* نلاحظ أن  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  وتكتب  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$   
 \* يسمي  $S$  المجال والعلاقة :- يسمي  $S$  المجال والعلاقة :-

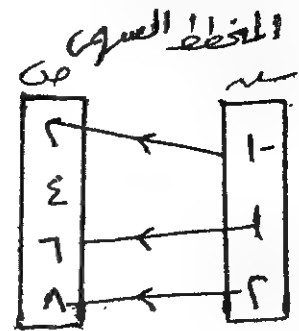
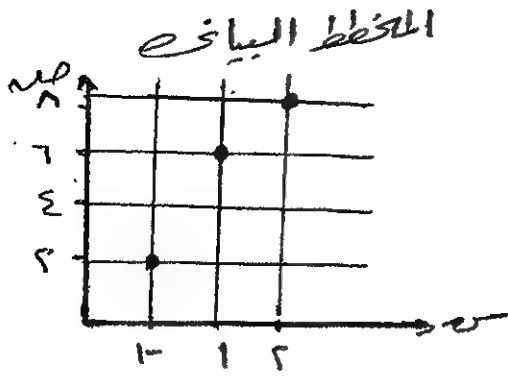
مثال ① :-

إذا كانت  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  وكانت  $R$  علاقة من  $S$  إلى  $T$  حيث  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  فإن  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  وتكتب  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  .  
 الحل :-

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

\* عندها  $P = 1$   $\Leftrightarrow 1 = 2 = 3 = 4 = 1 \times 2 = 2$   $\Leftrightarrow R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$   
 \* عندها  $P = 1$   $\Leftrightarrow 1 = 2 = 3 = 4 = 1 \times 2 = 2$   $\Leftrightarrow R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$   
 \* عندها  $P = 1$   $\Leftrightarrow 1 = 2 = 3 = 4 = 1 \times 2 = 2$   $\Leftrightarrow R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$



\* مما سيبدو لتستخرج أنه :-

① العلاقة عدد مجزئ من الى مجزئ من هو ارتباط يربط بعض أو كل عناصر من بعض أو كل عناصر من

② بيانه العلاقة عدد مجزئ من الى مجزئ من هو مجموعة الأزواج المرتبة حيث المقطع الأول ينتمي الى المجموعة س والمقطع الثاني ينتمي الى المجموعة من  
③ وإذا كانت ع علاقة عدد المجزئ من الى المجزئ من فانه "ع د س x من"

العلاقة عدد مجزئ الى نفسه :-

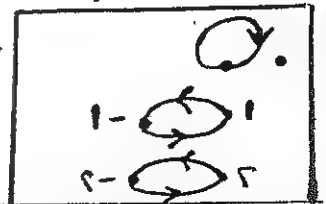
\* إذا كانت ع علاقة عدد مجزئ من الى من فانه ع تسمى علاقة على المجموعة من وتكون "ع د س x س"

مثال ⑤ :-

إذا كانت س = أ - ب - ج - د - هـ - و - ز - ح - ط - ك - ل - م - ن - س - هـ وكانت ع علاقة معرفة على س حيث "ع ب" تفي "العدد مقلوب جمع للعرب" لكن  $P \cap Q = \emptyset$  سه آتبع بيانه ع وشكلا بالمخططين التاليين :-

نريد أن نحصل على جميع الأزواج المرتبة التي مستطرا الأول مقلوب جمع لمستطرا الثاني  
∴ بيانه ع = أ ( - ) ب ( - ) ج ( - ) د ( - ) هـ ( - ) و ( - ) ز ( - ) ح ( - ) ط ( - ) ك ( - ) ل ( - ) م ( - ) ن ( - ) س ( - ) هـ

\* المخطط العشري



\* المخطط البياني

(أ) اسم البياني  
(ب) تفصل



الصفر مقلوبه  
لجمله هو نفسه  
وليس له مقلوب هنري



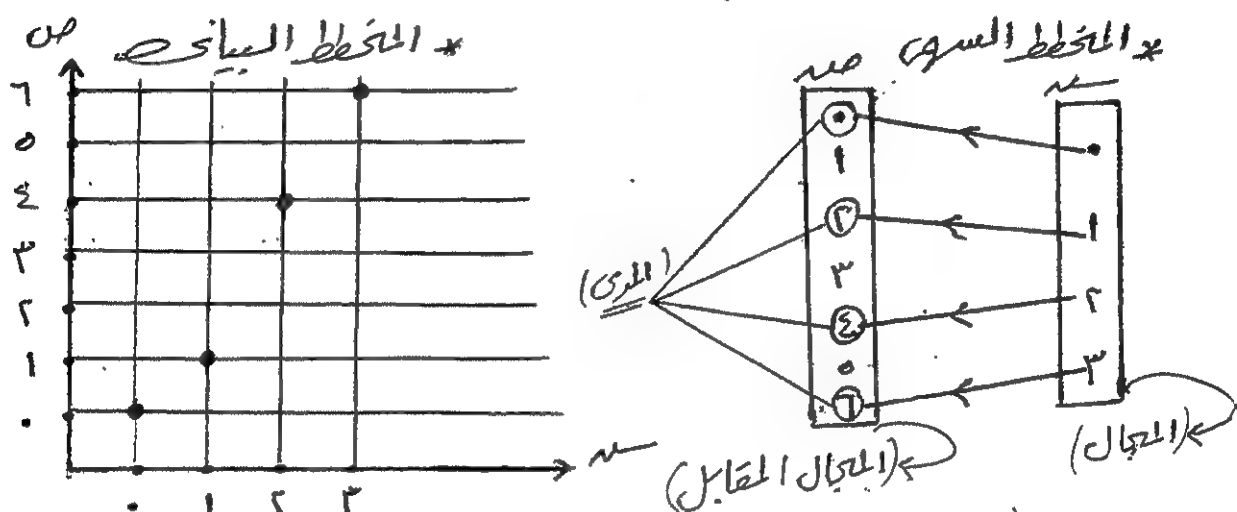
## \* الدالة \*

مثال ٣ :- إذا كانت  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  وكانت علاقة من  $S$  إلى  $P$  حيث  $P \ni x \Rightarrow x = P$  "لـ  $P$  و  $S \ni y \Rightarrow y = P$  أكتب بيانه  $f$  ومثله لمخطط سوما وآخر بيانيه .

الحل :-

نبدأه فنصل على جميع الأرواج المرتبة التي مستطرا الأول نصف مستطرا الثاني

$$f: S \rightarrow P \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



## \* منه المثال السابع :-

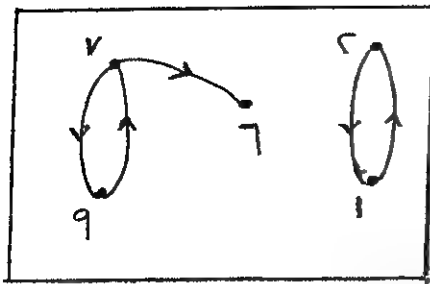
① كل عنصر من عناصر  $S$  يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر  $P$  مثل هذه

العلاقة تسمى "دالة" أو "قطعية"

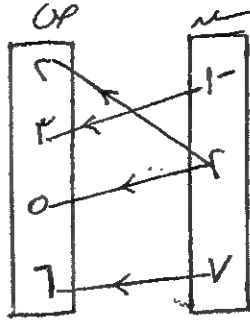
② المجموعة  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  تسمى "المجال" والمجموعة  $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  تسمى "المجال المقابل" مجموعة الصور  $f: S \rightarrow P$  تسمى "بالمapping" وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل

## مثال ٤ :-

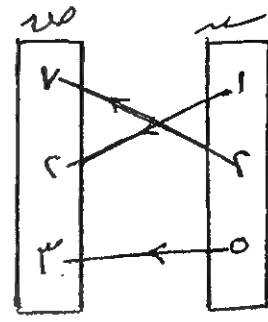
من كل من الأشكال الأتيه بيده أي العلاقات الأتيه دالة وأيضاً ليست دالة وإذا كانت دالة أذكر مداها .



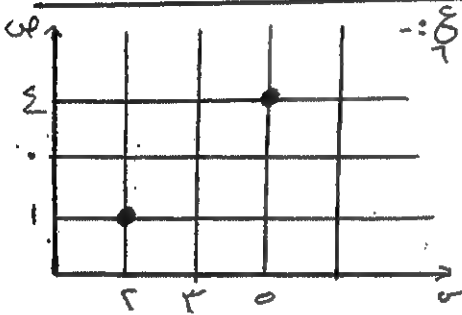
\*  $\mathbb{G}_3$  ليست دالة  
لأنه العنصر 37 من  
خرج منه سرجانه



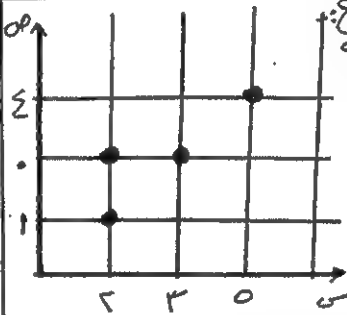
\*  $\mathbb{G}_2$  ليست دالة  
لأنه العنصر 32 من  
خرج منه سرجانه



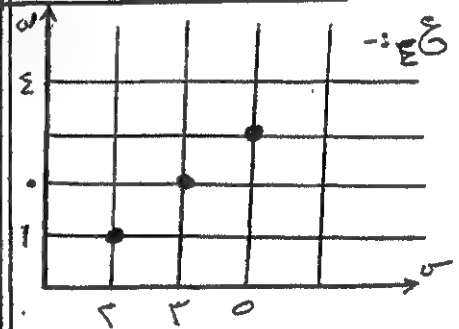
\*  $\mathbb{G}_1$  دالة لأنه كل عنصر من  
عناصره من خرج منه سرجان واحد  
فقط إلى عنصر من  
\*  $\mathbb{G}_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 1) \}$   
\*  $\mathbb{G}_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 1) \}$



\*  $\mathbb{G}_1$  ليست دالة لوجود خط  
رأس خالي منه النقطة



\*  $\mathbb{G}_2$  ليست دالة لوجود  
نقطتين على خط رأس



\*  $\mathbb{G}_3$  دالة لأنه كل خط  
رأس تقع عليه نقطة واحدة

مثال ٥ :-

إذا كانت  $\mathbb{G}_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 1) \}$  ،  $\mathbb{G}_2 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 1) \}$  وكانت  
علاقة عدد  $\mathbb{G}_1$  إلى  $\mathbb{G}_2$  حيث  $\mathbb{G}_1 \mathbb{G}_2$  تعني " $\mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2 = 0$ " لكل  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$   
١ ألق ببيان  $\mathbb{G}_1$  و  $\mathbb{G}_2$  على نقاط سرجان.  
٢ أذكر مع بيان السبب هل  $\mathbb{G}_1$  دالة من  $\mathbb{G}_2$  أم لا وإذا كانت  
دالة أذكر سرجانها.



حيث  $P$  هي "ب" فنأخذ  $P \geq 2$  نل  $P \geq 2$  من  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

علاقة  $P$  مع  $P$  هي  $P \geq 2$  فنأخذ  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$

نل  $P \geq 2$  من  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

علاقة  $P$  مع  $P$  هي  $P \geq 2$  فنأخذ  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$

أول  $P$  قسم  $P$  نل  $P \geq 2$  من  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$  وصل  $P$  والـ أم لا ولاذا ؟

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

$P$  هي "ب" فنأخذ  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$

أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وصل  $P$  والـ أم لا ولاذا ؟

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

بيان  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  أو جد القيمة العددية

للمقدار  $P + 2$  .

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

علاقة  $P$  مع  $P$  هي  $P \geq 2$  فنأخذ  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وآخر بيان  $P$

نل  $P \geq 2$  من  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل

إذا كانت  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$  وكانت

فنأخذ  $P \geq 2$  . أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل وصل  $P$  والـ أم لا ولاذا ؟

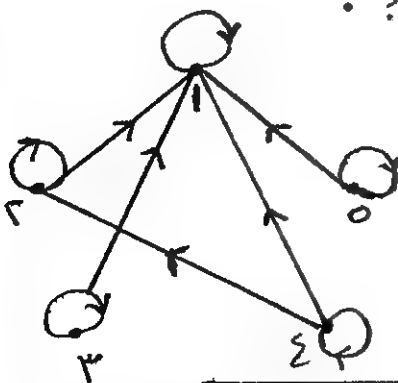
ممثل  $P$  لمخطط سهل وصل  $P$  والـ أم لا ولاذا ؟

في الشكل المقابل :-

ممثل  $P$  لمخطط سهل للعلاقة  $P \geq 2$  على المخطط

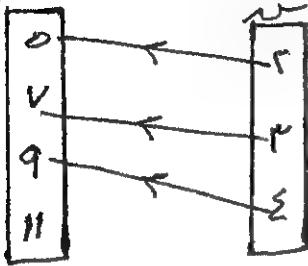
سهل  $P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

أكتب بيان  $P$  ومثل  $P$  لمخطط سهل



### (١٣) "دوال كثيرات الحدود"

هــ مثال شهيدى :- إذا كانت  $س = س^٢ + ٢س + ١$  و  $س = س^٢ + ٢س + ١$  وكانت  $س$  علاقة مع  $س$  ←  $س = س^٢ + ٢س + ١$  "نفس  $س$  و  $س$ "  
 و  $س = س^٢ + ٢س + ١$  نجد أنه  
 العلاقة مثل  $س = س^٢ + ٢س + ١$  وتكتب  $س = س^٢ + ٢س + ١$   
 أو  $س = س^٢ + ٢س + ١$  أى أنه الدالة  $س = س^٢ + ٢س + ١$   
 وهذا نجد أنه  $س = س^٢ + ٢س + ١$  أى أنه الدالة  $س = س^٢ + ٢س + ١$   
 المجال هو  $س$  والمجال المقابل هو  $س$  والمجال هو  $س$ .



هــ ملحوظة :- إذا كانت الدالة  $س = س^٢ + ٢س + ١$  حيث  $س = س^٢ + ٢س + ١$  هنا نقول أنه مجال الدالة  $س$  ومجال المقابل  $س$  وتسمى  $س = س^٢ + ٢س + ١$  بقاعدة الدالة

#### \* دوال كثيرات الحدود :-

هــ دوال تكون من  $س$  أو أكثر ويكون أس  $س$  عدد طبيعي

ومجال  $س$  ومجال المقابل  $س$  ويكون قاعدة  $س$  على الصورة :-

$$س = س^٢ + س + س^٣ + س^٤ + س^٥ + س^٦ + س^٧ + س^٨ + س^٩ + س^{١٠} + س^{١١} + س^{١٢} + س^{١٣} + س^{١٤} + س^{١٥} + س^{١٦} + س^{١٧} + س^{١٨} + س^{١٩} + س^{٢٠} + س^{٢١} + س^{٢٢} + س^{٢٣} + س^{٢٤} + س^{٢٥} + س^{٢٦} + س^{٢٧} + س^{٢٨} + س^{٢٩} + س^{٣٠} + س^{٣١} + س^{٣٢} + س^{٣٣} + س^{٣٤} + س^{٣٥} + س^{٣٦} + س^{٣٧} + س^{٣٨} + س^{٣٩} + س^{٤٠} + س^{٤١} + س^{٤٢} + س^{٤٣} + س^{٤٤} + س^{٤٥} + س^{٤٦} + س^{٤٧} + س^{٤٨} + س^{٤٩} + س^{٥٠} + س^{٥١} + س^{٥٢} + س^{٥٣} + س^{٥٤} + س^{٥٥} + س^{٥٦} + س^{٥٧} + س^{٥٨} + س^{٥٩} + س^{٦٠} + س^{٦١} + س^{٦٢} + س^{٦٣} + س^{٦٤} + س^{٦٥} + س^{٦٦} + س^{٦٧} + س^{٦٨} + س^{٦٩} + س^{٧٠} + س^{٧١} + س^{٧٢} + س^{٧٣} + س^{٧٤} + س^{٧٥} + س^{٧٦} + س^{٧٧} + س^{٧٨} + س^{٧٩} + س^{٨٠} + س^{٨١} + س^{٨٢} + س^{٨٣} + س^{٨٤} + س^{٨٥} + س^{٨٦} + س^{٨٧} + س^{٨٨} + س^{٨٩} + س^{٩٠} + س^{٩١} + س^{٩٢} + س^{٩٣} + س^{٩٤} + س^{٩٥} + س^{٩٦} + س^{٩٧} + س^{٩٨} + س^{٩٩} + س^{١٠٠}$$

حيث  $س = س^٢ + س + س^٣ + س^٤ + س^٥ + س^٦ + س^٧ + س^٨ + س^٩ + س^{١٠} + س^{١١} + س^{١٢} + س^{١٣} + س^{١٤} + س^{١٥} + س^{١٦} + س^{١٧} + س^{١٨} + س^{١٩} + س^{٢٠} + س^{٢١} + س^{٢٢} + س^{٢٣} + س^{٢٤} + س^{٢٥} + س^{٢٦} + س^{٢٧} + س^{٢٨} + س^{٢٩} + س^{٣٠} + س^{٣١} + س^{٣٢} + س^{٣٣} + س^{٣٤} + س^{٣٥} + س^{٣٦} + س^{٣٧} + س^{٣٨} + س^{٣٩} + س^{٤٠} + س^{٤١} + س^{٤٢} + س^{٤٣} + س^{٤٤} + س^{٤٥} + س^{٤٦} + س^{٤٧} + س^{٤٨} + س^{٤٩} + س^{٥٠} + س^{٥١} + س^{٥٢} + س^{٥٣} + س^{٥٤} + س^{٥٥} + س^{٥٦} + س^{٥٧} + س^{٥٨} + س^{٥٩} + س^{٦٠} + س^{٦١} + س^{٦٢} + س^{٦٣} + س^{٦٤} + س^{٦٥} + س^{٦٦} + س^{٦٧} + س^{٦٨} + س^{٦٩} + س^{٧٠} + س^{٧١} + س^{٧٢} + س^{٧٣} + س^{٧٤} + س^{٧٥} + س^{٧٦} + س^{٧٧} + س^{٧٨} + س^{٧٩} + س^{٨٠} + س^{٨١} + س^{٨٢} + س^{٨٣} + س^{٨٤} + س^{٨٥} + س^{٨٦} + س^{٨٧} + س^{٨٨} + س^{٨٩} + س^{٩٠} + س^{٩١} + س^{٩٢} + س^{٩٣} + س^{٩٤} + س^{٩٥} + س^{٩٦} + س^{٩٧} + س^{٩٨} + س^{٩٩} + س^{١٠٠}$

#### \* درجة الدالة كثيرة الحدود :-

هــ أبز قوة للمتغير قاعدة الدالة .

مثال ①

هــ أى من الدوال الآتية كثيرة حدود ، وإذا كانت كثيرة حدود أوجد درجتها :-

① $س = س^٢ + س + س^٣$	② $س = س^٢ + س + س^٣$	③ $س = س^٢ + س + س^٣$
④ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑤ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑥ $س = س^٢ + س + س^٣$
⑦ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑧ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑨ $س = س^٢ + س + س^٣$
⑩ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑪ $س = س^٢ + س + س^٣$	⑫ $س = س^٢ + س + س^٣$

الحل :-

- ① دالة كثيره حدود من الدرجة الثانية وتسمى " دالة تربيعية " .
- ② دالة كثيره حدود من الدرجة الخامسة .
- ③ دالة ليست كثيره حدود لانها الأس لا ينتمى إلى ط " الأس كسر " .
- ④ دالة كثيره حدود من الدرجة الأولى وتسمى " دالة خطية " .
- ⑤ دالة ليست كثيره حدود لانها "  $s = \frac{1}{s}$  " أي " الأس كسر " .
- ⑥ دالة كثيره حدود من الدرجة الثانية .
- ⑦ دالة ليست كثيره حدود لانها الأس لا ينتمى إلى ط "  $3 - \phi$  ط " .
- ⑧ دالة كثيره حدود من الدرجة الصغرى وتسمى " دالة ثابتة " .
- ⑨ دالة كثيره حدود من الدرجة الصغرى وتسمى " دالة ثابتة " .

\* \* \* \* \*

\* تدريب \*  
\* \* \* \* \*

أذكر أي من الدوال الآتية كثيره حدود وإذا كانت كثيره حدود أوجد درجتها

$$\begin{aligned} ① \text{ د (س) } &= s^5 + s^2 + 1 & ② \text{ د (س) } &= s^8 + \frac{1}{s} + 3 \\ ④ \text{ د (س) } &= s - 1 & ⑤ \text{ د (س) } &= s(s-2)^2 \\ ③ \text{ د (س) } &= s^7 + s + 1 & ⑥ \text{ د (س) } &= \frac{1}{s} + s^2 \end{aligned}$$

مثال ⑤ :-

إذا كانت د (س) =  $s^2 - 5$  أوجد :- د (١) ، د (٠) ، د (٥٧)

الحل :-

$$\begin{aligned} ① \text{ بوضع س } &= 1 \Rightarrow \text{ د (١) } = (1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \\ ② \text{ بوضع س } &= 0 \Rightarrow \text{ د (٠) } = (0)^2 - 5 = 0 - 5 = -5 \\ ③ \text{ بوضع س } &= 57 \Rightarrow \text{ د (٥٧) } = (57)^2 - 5 = 57 - 5 = 1 \end{aligned}$$

مثال ③ :-

إذا كانت د دالة كثيره حدود حيث د (س) =  $s^2 - 5s + 5$

أوجد د (٢) ، د (١) ، د (٠) ، أجب أنت أنه د (٢) =  $(1 + 57) = 4$  ، د (١) =  $(1 - 5) = -4$

الخطوة =

$$① * \text{بوضع س} = -2 \Rightarrow -2 = 0 + 2 + 2 = (2-)$$

$$* \text{بوضع س} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 0 + 1 - \frac{1}{2} = (\frac{1}{2}-)$$

⑤

$$* \text{الطرف الأيمن} :- \text{بوضع س} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2}) = 0 + (1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{2}) = 0 + 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1 \rightarrow ⑥$$

$$* \text{الطرف الأيسر} :- \text{بوضع س} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2} - 1) = 0 + (\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1) = 0 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$$

$$\therefore 2 = (\sqrt{2} - 1) \times 2 = 1 \rightarrow ⑦$$

منه ⑥، ⑦ ينتج أن

$$\# \boxed{(1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)}$$

### تأريخ على "دوال كثيرات الحدود"

الآن آمل ما يأتي :-

$$① \text{ الدالة } (د س) = س + ٧ \text{ كثيرة حدود من الدرجة } \dots\dots\dots$$

$$② \text{ الدالة } (د س) = س (س + ٢) \text{ كثيرة حدود من الدرجة } \dots\dots\dots$$

$$③ \text{ إذا كانت } (د س) = س - س + ٣ \text{ فها } (٢-) = \dots\dots\dots$$

$$④ \text{ إذا كانت } (د س) = س - ٤ \text{ كثيرة حدود فها } (٧-) = \dots\dots\dots$$

$$⑤ \text{ إذا كانت } (د س) = ٢، ٤، ٦، ٨ \text{ وكانت د: س صح، د(س) = ٢ + ٣ فها من الدالة } \dots\dots\dots$$

$$⑥ \text{ إذا كانت } (د س) = س \text{ فها } (٢-) + (٢-) = \dots\dots\dots$$

$$⑦ \text{ إذا كان } (١-) = ٠ \text{ فها الدالة د حيث د(س) = ٢ + س فها } ٢ = \dots\dots\dots$$

$$⑧ \text{ إذا كانت } (د س) = ٢ + س + ٦، د(٢) = ٣ فها } ٢ = \dots\dots\dots$$

$$⑨ \text{ الدالة } (د س) = (س - ٥) \text{ كثيرة حدود من الدرجة } \dots\dots\dots$$

$$⑩ \text{ إذا كانت } (د س) = س - ٥ \text{ وكان } \frac{1}{2} \text{ د(٢) = ٣ فها } ٢ = \dots\dots\dots$$

١٢ أي عدد الدوال اللغوية تمثل كثيرة حدود وإذا كانت كثيرة حدود أذكر درجتها :-

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} د(س) = ٥ - ٢س \\ \textcircled{2} د(س) = ٢ + س + س^٢ \\ \textcircled{3} د(س) = ٨ + س + س^٢ + س^٣ \\ \textcircled{4} د(س) = ٢ \\ \textcircled{5} د(س) = ٣ - س \\ \textcircled{6} د(س) = ٨ + س + س^٢ + س^٣ \\ \textcircled{7} د(س) = ١ - س + س^٢ \end{array}$$

١٣ إذا كانت د(س) = ٢ - س - ٥س + ٢

أذكر درجة الدالة د ، أثبت أن د(٢) = د(١/٢)

١٤ إذا كانت د(س) = ٥ - ٣س - ٢س ، ر(س) = ٣ - س ، أوجد :-  
 ① د(٢٧) + ٣ر(٢٧) ② أثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

### \* دراسة بعض دوال كثيرات الحدود والتمثيل البياني لها \*

#### أولاً :- الدالة الخطية :-

\* الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = س + ب ، P ح \*  
 ب ح قسم داله خطية " من الدرجة الأولى "  
 \* أمثلة لدوال خطية :-

$$د(س) = ١ + ٥س - ٣ ، ح - ١/٢س ، د(س) = ٢ - ٥س$$

\* التمثيل البياني للدالة الخطية :-

تمثل الدالة الخطية بخط مستقيم يقطع :-

① محور الصادات من النقطة (٠، ب) ② محور السينات من النقطة (ب/٥، ٠)

أو

\* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع د(س) = ٠ = صفر .

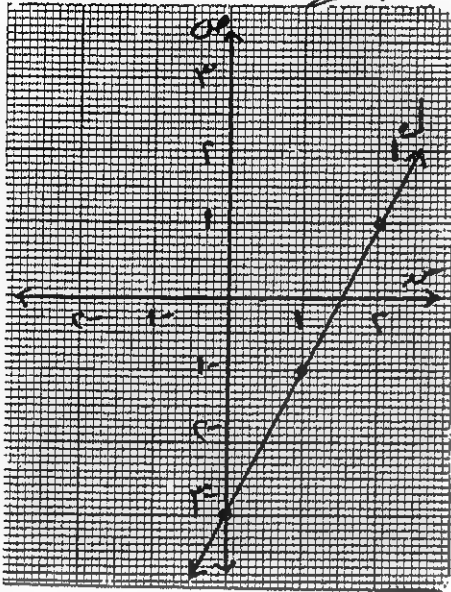
\* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = صفر .

مثال ① :- مثل بيانياً كل من الدالتين :- ① د(س) = ٣ - ٢س ② د(س) = ١/٣س  
 الحل :-



$$① \text{ د (س) } = 3 - 5 - 2$$

نعين ثلاثة أزواج مرتبة تتفق إلى بيان  $P$  وعليه كتابته في جدول كالآتي



س	٠	١	٢
د(س) ص =	٣-	١-	١

لـ :-

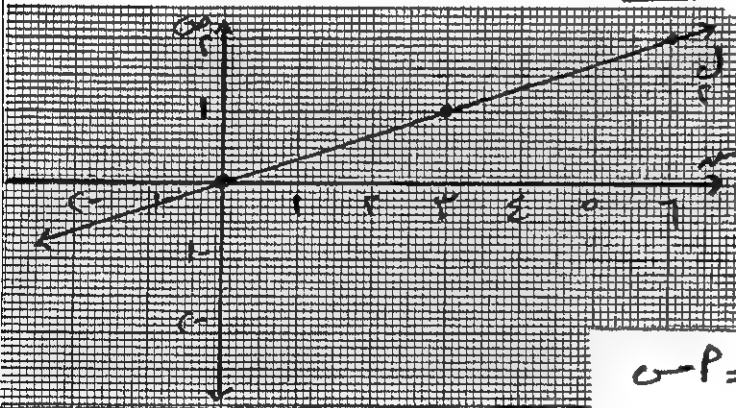
\* نمثل هذه النقطة على الشبكة التدريجية  
\* المستقيم الذي أمانا هو القمط البياني للدالة  
وهو ملحوظة :- يمكن إيجاد نقطتي التقاطع مع المحورين :-  
 $3 = P \Leftrightarrow 3 - 5 - 2 = 0$   
 $3 = 0$

① نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠, ٣) = (٣, ٠)

② نقطة التقاطع مع محور السينات = (٠, ٣) = (٣, ٠)

وهو يمكن تمثيل الخط المستقيم الممثل للدالة برأسي النقطتين ودرجته الجدول

$$⑤ \text{ د (س) } = \frac{1}{3} - 5$$



س	٠	٣	٦
د(س)	٠	١	٢

لـ :-

وهو ملحوظة :-

الدالة د :  $\leftarrow$  حيث د(س) =  $P - 5$   
 $P = 6$  حيث "ح. ٢. ٠" أي أنه عندما  $P = 6$   
 فإنها تمثل الخط مستقيم يمر بنقطة الأصل .

\*\*\*  
 \* تمثيل بيانيا الدالة د : د(س) =  $3 - 5 - 2$   
 \* تم أو جد نقطتي التقاطع مع المحورين  
 \*\*\*



ثالثاً: الدالة التربيعية :-

\* الدالة  $D(s) = P \cdot s^2 + B \cdot s + J$  حيث  $P, B, J$  أعداد

حقيقية  $P \neq 0$  . تسمى دالة تربيعية "معد الدرجة الثانية"

أصله :-

$$D(s) = s^2 \quad D(s) = s^2 - 4 = 0 \quad D(s) = s^2 - 5s + 1 = 0$$

\* تمثل الدالة التربيعية على فترة معينة عند طرئها تعين بعض الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيانه الدالة ثم نرسم منحنى يربط هذه النقاط .

مثال ① :-

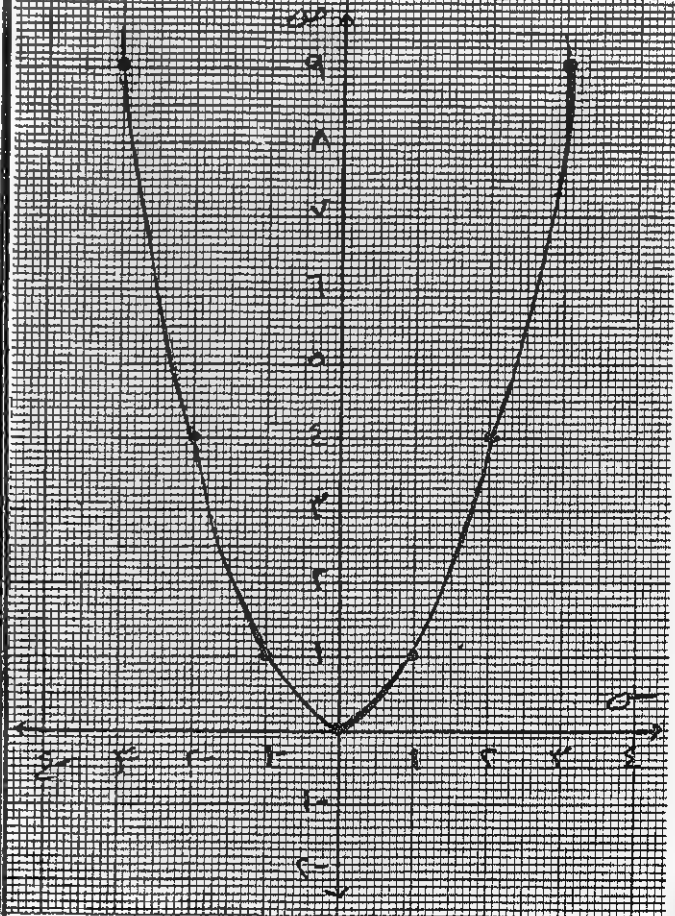
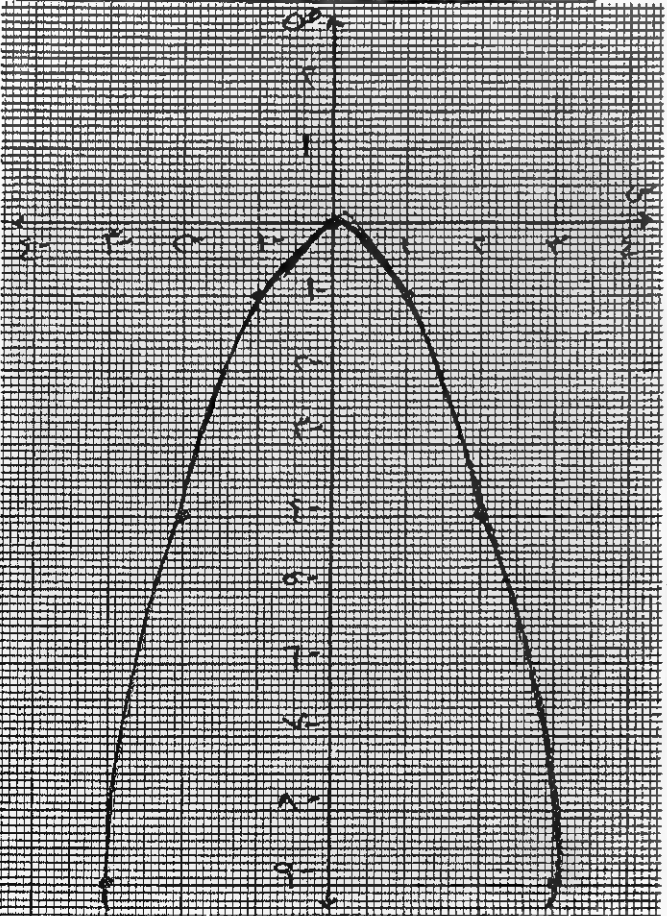
مثل بيانياً كلا من الدالتين الآتيتين :-

②  $D(s) = -s^2$  متخذاً  $s$  و  $[-3, 3]$

③  $D(s) = s^2$  متخذاً  $s$  و  $[-3, 3]$

$s$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$D(s)$	-9	-4	-1	0	1	4	9

$s$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$D(s)$	9	4	1	0	1	4	9



\* معامل  $S < 0$  الصغير

• المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات  
أي أنه محور الصادات هو محور تماثل المنحنى  
ومعادلته  $S = 0$ .

• النقطة  $(0, c)$  هي نقطة رأس المنحنى  
وهي نقطة قيمة صفري لأحد المنحنى يقع  
بالملة فوق  $x$ .

• القيمة الصفري للدالة هي صفري وهي  
الأصوات الصاري لنقطة رأس المنحنى

\* معامل  $S > 0$  الصغير

• المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات  
أي أنه محور الصادات هو محور تماثل المنحنى  
ومعادلته  $S = 0$ .

• النقطة  $(0, c)$  هي نقطة رأس المنحنى  
وهي نقطة قيمة عظمى لأحد المنحنى يقع  
بالملة تحت  $x$ .

• القيمة العظمى للدالة هي صفري وهي  
الأصوات الصاري لنقطة رأس المنحنى

## ملاحظات هامة :-

- 1- إذا كان معامل  $S$  موجب فإنه المنحنى يكون مفتوحاً للأعلى ويكون له نقطة قيمة صفري.
- 2- إذا كان معامل  $S$  سالب فإنه المنحنى يكون مفتوحاً للأسفل ويكون له نقطة قيمة عظمى.
- 3- إذا كانت نقطة رأس المنحنى  $(p, c)$  فإنه معادلة محور التماثل هي  $x = p$   
والقيمة العظمى أو الصفري للدالة تساوي  $c$  وذلك حسب معامل  $S$ .

## مثال ٥ :-

- اسم مصنع الدالة  $D(S) = S^2 - 3S - 4$  من الفترة  $[-4, 4]$  وقد رسم أولها :-
- 1- نقطة رأس المنحنى وهو إذا كانت نقطة قيمة عظمى أو صفري.
  - 2- اسم محور التماثل للدالة والقي معادلته.
  - 3- أوجد القيمة العظمى أو الصفري للدالة.

الحل :-

$$D(S) = S^2 - 3S - 4$$

$$\downarrow$$

4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	-3	-4	-3	0	3	4	0

← نقطة رأس المنحنى

\* عدد الرسم نجد أنه :-

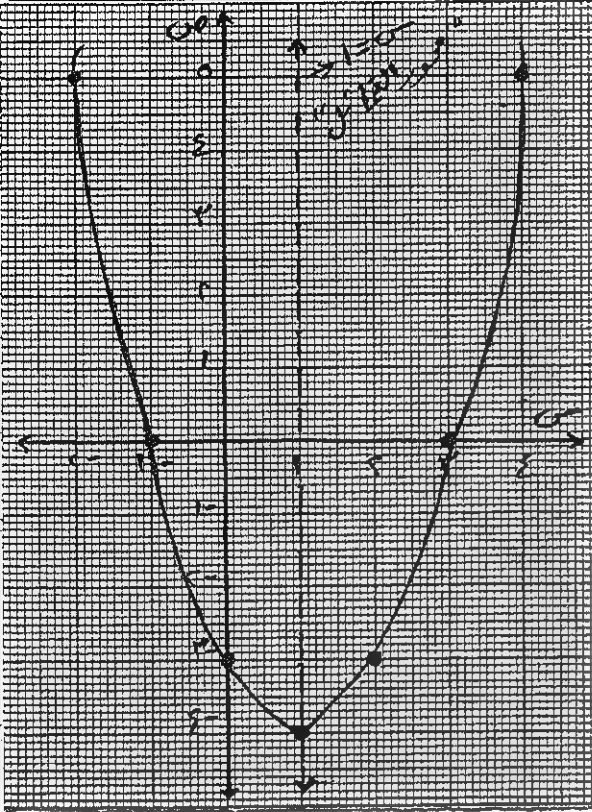
- نقطة رأس المنحنى هي (6-1) "صفرى"

- معادلة محور التماثل هي  $x = 1$

- القيمة الصغرى للدالة  $= -1$

• محور التماثل هو مستقيم يوازي محور الصادات

و يمر بنقطة رأس المنحنى .



مثال ٣ :-

ارسم صفحة الدالة  $d(x) = x^2 + 2x - 3$

من الفترة  $[-2, 4]$  و عدد الرسم أربعة :-

١- نقطة رأس المنحنى  $-1$  - القيمة العظمى أو الصغرى .

٣- ارسم محور التماثل والقيم معادلته .

الحل :-

تكتب لإشارة ترتيب الوالد كما يلي :-

$$d(x) = x^2 + 2x - 3$$

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$d(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

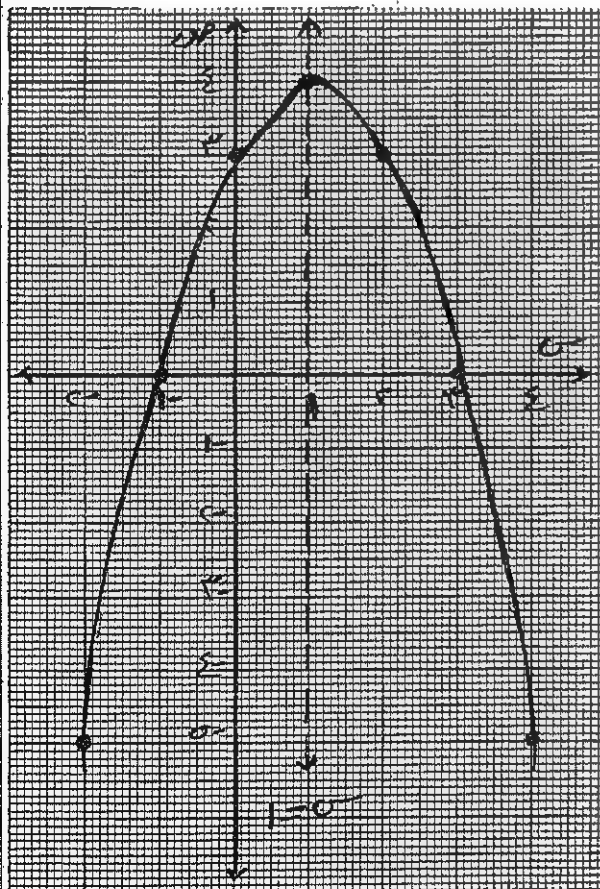
↑↑

\* عدد الرسم نجد أنه :-

- نقطة رأس المنحنى هي (1-4)

- معادلة محور التماثل هي  $x = -1$

- القيمة العظمى للدالة  $= -4$



\* \* \*

\*\*\* تدريب \*\*\*  
 ارسم منحنى الدالة  $D(x) = (x-3)^2$  مقداراً من  $0$  إلى  $6$  [٦٠] ومنه  
 الرسم أوجد :- ① معادلة محور التماثل ② القيمة العظمى والصغرى للدالة.

رسم ملحوظة هامة :-  
 نقطة رأس المنحنى لأي دالة تربيعية تكون على الصورة :-

$$\left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \text{ أي أنه الإحداثي السيني } = -\frac{b}{2a} \text{ والحداثي الصادي } = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

حيث  $a$  معامل  $x^2$  ،  $b$  معامل  $x$  .

مثال ④ :- ارسم منحنى الدالة  $D(x) = x^2 - 3x + 2$  مقداراً من  $0$  إلى  $4$  [٦١] ومنه الرسم أوجد :- ① نقطة رأس المنحنى ② معادلة محور التماثل

الخط :-

$x$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$D(x)$	$2$	$1$	$0$	$1$	$2$

\* نلاحظ أنه نقطة رأس المنحنى غير ظاهر  
 المحلول كما في الأمثلة السابقة .  
 ← كما نجد نقطة رأس المنحنى جبرياً :-

$$\bullet \text{ الإحداثي السيني } = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ الإحداثي الصادي } = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow D\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4}$$

∴ نقطة رأس المنحنى هي  $\left(-1\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

③ معادلة محور التماثل هي  $x = -1\frac{1}{2}$  ④ القيمة العظمى للدالة  $= -\frac{5}{4}$  .

## تمارين على "بعض دوال التمثيل البياني لـ"

١٢ الممل ما يأتي :-

- ① الدالة  $D = (S)$   $\Rightarrow$   $\emptyset$  يمثل بيانياً خط مستقيم يوازي ..... ويقطع محور الصادات في النقطة .....
- ② محور السينات هو التمثيل البياني للدالة  $D = x - 3$  حيث  $D = (S)$  = .....
- ③ إذا كانت  $D = (S) \Rightarrow \emptyset$  فإيه  $D = (5) \div D = (10)$  = .....
- ④ إذا كانت النقطة  $(2, P)$  تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة  $D = (S) \Rightarrow S = 0$  فإيه  $P =$  .....
- ⑤ معادلة خط التماس للدالة  $D = (S) \Rightarrow S =$  هي .....
- ⑥ عند تمثيل  $D = (S) \Rightarrow P = S + 0 + 0$  حيث  $P \in \mathbb{R}^*$  فإيه الأضراسي السين
- نقطة رأس المنحنى = ..... الأضراسي الصادي = .....
- ⑦ نقطة رأس المنحنى للدالة  $D = (S) \Rightarrow S = 0 + 0 + 0$  هي .....
- ⑧ إذا كانت  $D = (S) \Rightarrow$  تنتمي إلى منحنى الدالة  $D = (S) \Rightarrow S = 1 + 0$  فإيه  $S =$  .....

١٣ اختي الإجابة الصحيحة :-

- ① إذا كانت  $D = (S) \Rightarrow V$  فإيه  $D = (3)$  = .....  $[0, 6, 7, 6, 3, 6, 10]$
- ② إذا كانت  $D = (S) \Rightarrow \emptyset$  فإيه  $D = (3) - D = (1)$  = .....  $[10, 6, 0, 6, 2, 6, (2)]$
- ③ إذا كانت  $D = (S) \Rightarrow E$  فإيه  $D = (S)$  = .....  $[2, 6, 2, 6, 2, 6, 2]$
- ④  $D = (S) \Rightarrow S = 6$   $\Rightarrow [2, 6, 2]$  فإيه  $D = (S) \Rightarrow$  .....  $[4, 6, 4], [2, 6, 2], [6, 6, 6], [2, 6, 2]$
- ⑤ إذا كان منحنى الدالة  $D = (S) \Rightarrow S = P$
- يمر بالنقطة  $(0, 6)$  فإيه  $P =$  .....  $[0, 6, 1, 6, 1, 6, 0]$
- ⑦ الدالة  $D = (S) \Rightarrow S =$  يمثل بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة .....  $[2, 6, 2], [0, 6, 0], [0, 6, 0], [2, 6, 2]$

١٤ مثل بيانياً كلامه الدوال الآتية حيث  $S \in \mathbb{R}$  :-

①  $D = (S) \Rightarrow \emptyset$   $\Rightarrow$   $\mathbb{R}$   $\Rightarrow$   $D = (S) \Rightarrow E$   $\Rightarrow$   $\mathbb{R}$   $\Rightarrow$   $D = (S) \Rightarrow$  هههه



٤٤ مثل بيانياً كلا من الدوال الخطية الأتية وأوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لكل دالة مع محورتي الإحداثيات حيث  $s \geq 0$  :-

③  $d: d(s) = s + 2$       ④  $d: d(s) = 3 - s$

⑤  $d: d(s) = 2 - s$       ⑥  $d: d(s) = 0 - \frac{1}{2}s$

٤٥ مثل بيانياً كل من الدوال الأتية ومع الرسم استنتج الإحداثي لنقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة حيث  $s \geq 0$  :-

①  $d: d(s) = s^2 - 2$  عند  $s = 0$  [٣، ٢-]

②  $d: d(s) = s^2 - 2s$  عند  $s = 0$  [٤، ٢-]

③  $d: d(s) = s^2 + 5s + 1$  عند  $s = 0$  [٢، ٤-]

④  $d: d(s) = (s - 2)^2$  عند  $s = 0$  [٥، ١-]

⑤  $d: d(s) = 1 - 3s + \frac{1}{4}s^2$  عند  $s = 0$  [٤، ١-]

٤٦ الشغل المقابل ليحل عندي الدالة د

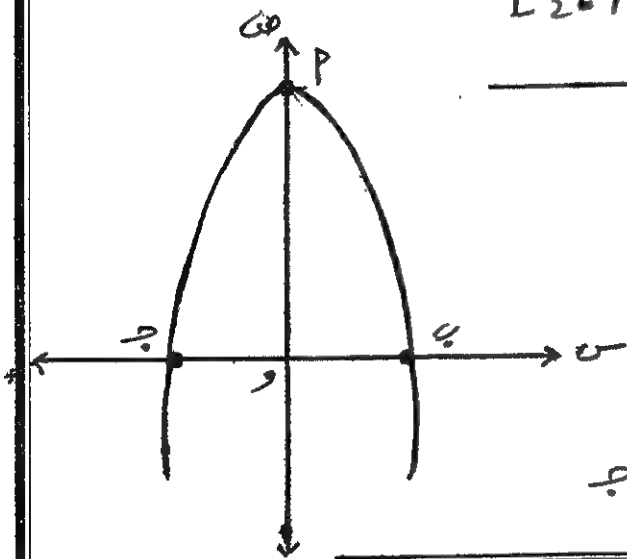
حيث  $d(s) = s^2 - 3s + 2$  ، إذا كان

$P = 0$  و  $E$  و  $H$  أوجد :-

١- قيمه  $M$

٢- الإحداثي  $B$

٣- مساحة المثلث الذي رؤوسه  $P, B, E$





## اختبار الوحدة

● إذا كانت  $s = \{0, 1, 4, 7\}$ ،  $v = \{1, 3, 5, 7\}$ ، ع علاقة من  $s$  إلى  $v$ ، حيث  $a \in b$  تعني:  
 « $a + b > 6$ » لكل  $a \in s$ ،  $b \in v$  اكتب بيان ع ومثلها بمنحطٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة؟  
 اذكر السبب.

● مثل بيانيًا كلاً من الدوال الآتية:

د (س) =  $-2s$

د (س) =  $s^2 - 1$

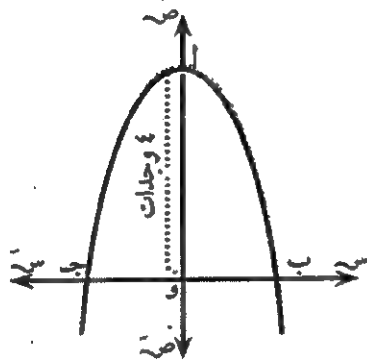
د (س) =  $s^2 - 3$  متخذاً  $s \in [-3, 3]$  د (س) =  $s^2 - 1$  متخذاً  $s \in [-1, 4]$

● أثناء قراءة كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:

مثل العلاقة بين ن، ص بيانيًا ثم أوجد العلاقة الجبرية بينهما.

ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من القراءة؟

كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟



● الشكل المقابل: يمثل منحني الدالة د حيث:

د (س) =  $s^2 - م$ ، إذا كان  $ا = ٤$  وحدات

أوجد:

قيمة م.

إحداثيي ب، ج.

مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، ج.

## الوحد الثانية : -

# النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

(1) النسبة والتناسب

(2) التناسب المتسلسل

(3) التغير الطردى والتغير العكسى

## اختبار الوحدة

"الوحدة الثانية""(١) النسبة والتناسب"أولاً :- النسبة :-

هي إحدى طرفي المقارنة بينهما يتقن

أو هي علاقة بين عددين  $a, b$  وتكتب  $a : b$  أو  $\frac{a}{b}$   
 وتقرأ  $a$  إلى  $b$  وليس  $a$  بقسم  $b$  ، وتسمى  $b$  بجالي النسبة وليس  $a$  ،  $b$  مقام  
 حربي النسبة .

\* خواص النسبة :-

① قيمة النسبة لا تتغير إذا ضربنا طرفيها في "أو قسمنا على" عدد لا يساوي الصفر.  
 مثال :-

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \frac{12}{18} = \frac{4 \times 3}{6 \times 3} = \frac{4}{6}$$

② قيمة النسبة تتغير إذا أضفنا إلى طرفيها أو طرحنا منها عدد حقيقي لا يساوي الصفر.  
 مثال :-

$$\frac{7+3}{7+0} \neq \frac{3}{0} \quad \text{و} \quad \frac{7-3}{7-0} \neq \frac{3}{0}$$

ثانياً :- التناسب :-

هو تساوي نسبتي أو أكثر .

\* إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فأي  $a, b, c, d$  كميات متناسبة والعكس صحيح

وليس  $a$  بالاول المتناسب .  $b$  بالثاني المتناسب .

$c$  بالثالث المتناسب .  $d$  بالرابع المتناسب .

وليس  $a$  بفرص التناسب  $c$  ب  $d$  بوسطي التناسب

مثال :- إذا كان  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$  فإما  $6 \times 9 \times 6 \times 3$  كميات متناسبة والعكس أي إذا كان  $6 \times 9 \times 6 \times 3$  كميات متناسبة فإما  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$  \* خواص التناسب :-

① إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإما  $a \times d = b \times c$  فإما "ما قبل ضرب الطرفية" = "ما بعد ضرب الوسطية"

مثال :-

$$\text{إذا كان } \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Leftarrow \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Leftarrow 4 \times 6 = 3 \times 8 \text{ أي } 24 = 24$$

مثال ① :-

- ① أوجد الثاني المتناسب لكميات  $10 \ 6 \ 15 \ 6 \ 3$  .
- ② إذا كان  $6 \times 5 \times 6 \times 10$  كميات متناسبة أوجد قيمه س .
- ③ أوجد الرابع المتناسب لكميات  $10 \ 6 \ 3 \ 6 \ 5$  .

الحل

<p>① بفرض الثاني المتناسب = س</p> <p><math>6 \times 3 \times 10 \times 6 \times 5</math> كميات متناسبة</p> <p><math>\therefore \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftarrow 6 \times 5 = 10 \times 3</math></p> <p><math>30 = 30</math> (ب) <math>\Rightarrow</math> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">30 = س</span></p>	<p>② بفرض الرابع المتناسب = س</p> <p><math>6 \times 3 \times 10 \times 6 \times 5</math> كميات متناسبة</p> <p><math>\therefore \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftarrow 6 \times 5 = 10 \times 3</math></p> <p><math>30 = 30</math> (ب) <math>\Rightarrow</math> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">30 = س</span></p> <p>∴ الثاني المتناسب هو 3 .</p>
--	--

③ بفرض الرابع المتناسب = س

$10 \ 6 \ 3 \ 6 \ 5$  كميات متناسبة

$\therefore \frac{10}{5} = \frac{6}{3} \Leftarrow \frac{10}{5} = \frac{6}{3} \Leftarrow 10 \times 3 = 5 \times 6$

$30 = 30$  (ب)  $\Rightarrow$  30 = س

∴ الرابع المتناسب هو 10 .

- \* \* \* \* \*
- \* تدريب \*  
\* \* \* \* \*
- ① أوجد الأول المتناسب لكميات  $79 \ 6 \ 10 \ 6 \ 3$
  - ② أوجد الرابع المتناسب لكميات  $18 \ 6 \ 12 \ 6 \ 9$
  - ③ الخاف المتناسب للأعداد  $6 \ 6 \ 6 \ 6$  هو .....
  - ④ الثالث المتناسب للأعداد  $12 \ 6 \ 6 \ 8$  هو .....

مثال ٥ :- أوجد العدد الذي إذا أُضيف إلى الأعداد ١٣٦١ ٧٦ ٣١٤ تصبح متساوية.  
الحل:

نفرض أن العدد =  $x$   $\Rightarrow x + 1 + 136 + 76 + 314 =$  كليات متساوية  
 $\therefore \frac{x+1}{x+314} = \frac{x+7}{x+31} \Rightarrow (x+1)(x+7) = (x+314)(x+1)$

\* فربالا  
 $x^3 + \dots = (x+5)(x+2) = x^2 + 7x + 10$   
 $10 + 5 - 8 + 5 = 50 +$

$\Rightarrow x^3 + 91 = x^3 + 314 + 31$   
 $\Rightarrow 31 - 91 = x - 32$   
 $\Rightarrow 12 = x - 32 \Rightarrow x = 44$   
 $\boxed{x=44}$

$\therefore$  العدد هو ٤٤

مثال ٣ :-

أوجد العدد الذي إذا أُضيف إلى عدد النسبة  $\frac{3}{5}$  لأصبحت  $\frac{5}{7}$

الحل :-  
 نفرض أن العدد =  $x$   $\Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{x+3}{x+5} \Rightarrow 5(x+5) = 7(x+3)$   
 $\Rightarrow 5x + 25 = 7x + 21 \Rightarrow 25 - 21 = 7x - 5x$   
 $\Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2$   
 $\boxed{x=2}$   
 $\therefore$  العدد هو ٢

مثال ٤ :- أوجد العدد الموجب الذي إذا أُضيف مربعه إلى كل من عدد النسبة  $\frac{5}{11}$  : ١١  
 فإنها تصبح  $\frac{3}{5}$

الحل :- نفرض أن العدد =  $x$   $\therefore$  مربعه =  $x^2$   
 $\frac{3}{5} = \frac{x^2+5}{x^2+11} \Rightarrow 3(x^2+11) = 5(x^2+5)$   
 $\Rightarrow 3x^2 + 33 = 5x^2 + 25 \Rightarrow 33 - 25 = 5x^2 - 3x^2$   
 $\Rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$   
 $\therefore$  العدد هو ٢

\* \* \* \* \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* \* \* \* \*

أوجد العدد الموجب الذي إذا أُضيف مربعه إلى عدد النسبة  $\frac{5}{11}$  : ١١  
 فإنها تصبح  $\frac{3}{5}$



② وإذا كان  $\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$  فإن  $P = Q$  حيث  $m$  ثابتة لا يساوي الصفر

مثال: إذا كان  $\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$  فإن  $P = Q$  حيث  $m$  ثابتة  $\neq 0$

مثال: إذا كان  $\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$  أو جد قيمة  $\frac{P}{Q}$

الحل:  $\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \Leftrightarrow P = Q$  بالتعويض عن  $P$  في العلاقة

$$\frac{18}{11} = \frac{18}{11} = \frac{12 + 6}{12 - 10} = \frac{12 \times 3 + 6 \times 2}{12 - 10} = \frac{36 + 12}{12 - 10} \Leftrightarrow$$

مثال: إذا كان  $P = Q$  أو جد قيمة المقدار  $\frac{P}{Q}$

$$P = Q \Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \Leftrightarrow P = Q$$

$$\frac{30}{34} = \frac{70}{78} = \frac{70}{78} = \frac{50 + 20}{50 + 28} = \frac{(50) \times 2 + 20 \times 2}{50 \times 2 + (28) \times 2} = \frac{100 + 40}{100 + 56} \Leftrightarrow$$

ملاحظة: عند نقول مثلاً أن النسبة بين عددين ٣:٢ فلا يجوز إطلاقاً اعتبار العدد الأول ٢ والعدد الثاني ٣ ولكنه بغيره أنه العددين هما  $P$  و  $Q$   $\Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$  فإن  $P = Q$  حيث  $m$  ثابت

مثال: عددان صغيرا له النسبة بينهما ٥:٢ وإذا تم ضيف إلى كلاهما ٥ أصبحت النسبة ٥:٣ أو جد العددين

$$\frac{P}{Q} = \frac{5+2}{5+3} \Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow (5+3)P = (5+2)Q \Leftrightarrow$$

$$8P = 7Q \Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow P = 7, Q = 8$$

:- العدد الأول =  $2 \times 2 = 4$       في العدد الثاني =  $2 \times 5 = 10$       :- العددين هما ١٠ و ٤

\*\*\*  
تدريب\*\*\*

• عدوانه حقيقياً النسبة بينهما ٢:٥ وإذا طرح منه العدد العدد ٢ وأضيف إلى الثاني ١ جارة النسبة بينهما ١:٤ أو هو العديدي

• عدوانه حقيقياً النسبة بينهما ٢:٣ وإذا أضيف إلى كل منط ٣ أصبحت النسبة ٣:٤ أو هو العديدي

### تمارين على النسبة والتناسب

III المكن ما يأتي :-

① التناسب هو .....

② إذا كانت  $P, B, D$  كميات متناسبة فبانه  $D$  تساوي .....

③ إذا كانت  $P, B, D$  كميات متناسبة فبانه  $\frac{P}{B} = \frac{D}{B}$  ..... =

④ الرابع المتناسب للاعداد ١٦ ٦ ١٢ ٤ هو .....

⑤ إذا كان  $٧-٥ = ٣$  فبانه  $\frac{٥}{٣} = \frac{٧}{٣}$  ..... =

⑥ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢:٣ فإذا كان نصيب الأول ٣٠ فبانه نصيب الآخر .....

⑦  $P_0 - P_1 = B$  فبانه  $\frac{P}{B} = \frac{P_0 - P_1}{B}$  ..... =

⑧ إذا كان  $\frac{P_0 - P_1}{P_1 + P_2} = \frac{B}{P}$  فبانه  $\frac{P}{B} = \frac{P_1 + P_2}{P_0 - P_1}$  ..... =

⑨ إذا كان  $\frac{P}{B} = \frac{C}{D}$  فبانه  $\frac{P}{C} = \frac{B}{D}$  ..... =

IV اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان  $\frac{P}{B} = \frac{٣}{٥}$  فبانه  $\frac{١}{٤} = \frac{P}{B}$  ..... =

② إذا كان  $٥-٥ = ٥$  فبانه  $\frac{٥٥}{٥} = \frac{٥٥}{٥}$  ..... =



- ① إذا كان  $23 = 8b$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{3}{8}, \frac{17}{3}, 16, 16, 16 \right]$
- ② إذا كان  $52 = 7v$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{5}{29}, \frac{29}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right]$
- ③ إذا كان  $55 = 36$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right]$
- ④ إذا كان  $90 = 26$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right]$
- ⑤ إذا كان  $95 = 9 + 5$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right]$
- ⑥ إذا كان  $\frac{P}{C} = \frac{3}{2}$  فإن  $\frac{P}{C} = \dots$   $\left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right]$

③ ① إذا كان  $\frac{2}{3} = \frac{5+3}{5-3}$  أو جد النسبة  $5:3$

⑤ أو جد العدد الذي إذا أضيف مربعة إلى كل عدد من النسبة  $7:11$

فإنه يصح  $5:0$

⑥ عددان صحيحان النسبة بينهما  $3:7$  وإذا طرح من كل منهما  $5$  أصبحت النسبة  $1:3$  أو جد العددين.

⑦ إذا كان  $\frac{C}{P} = \frac{5}{3}$  أو جد قيمة النسبة  $\frac{5+3}{5-3}$

⑧ إذا كان  $P:b = 3:5$  أو جد قيمة  $9+P$  و  $4+C$ .

⑨ أو جد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله من عدد من النسبة  $\frac{29}{79}$  أصبحت  $\frac{C}{P}$

⑩ أو جد العدد الذي إذا أضيف كل من الأعداد  $7, 9, 12, 10$  أصبحت كميات متناسبة.

⑪ إذا كان  $1-P, 1+P, 1-b, 1+b$  كميات متناسبة أو جد  $P:b$

⑫ عددان صحيحان النسبة بينهما  $2:3$  وإذا أضيف للأول  $7$  وطرح من

الثاني  $12$  كانت النسبة  $5:3$  أو جد العددين.

⑬ ما العدد الذي إذا طرح من مقدم النسبة  $15:13$  وأضيف إلى

المليط فإنها تصح  $3:5$

تابع/ فوا من التناصب

۱۔ ملاحظات عامہ :-

$$r_0 = p, r_1 = 0, r_2 = p, \dots, 0: r_3: r_4 = p: 0: p, \dots \text{ (1)}$$

$$\Sigma : V : \mathcal{P} = \frac{\rho}{\sigma} : \varphi : P \sim \frac{1}{6} \quad \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\sigma}{V} = \frac{P}{T} \sim 613! \text{ ⑤}$$

$$11:3:5 = \phi:\psi:\rho \sim \sqrt{5} \quad \frac{\psi}{11} = \frac{\phi}{5} \text{ و } \frac{\phi}{\psi} = \frac{\rho}{5} \sim \sqrt{13} \text{ و } \textcircled{13}$$

④ ⑤ إذا كانت  $P, B, G$  و  $S$  كيانات متساوية وفرضنا أن  $\left[ \frac{P}{S} = \frac{B}{G} = M \right]$   
 نحصل أن  $P = B = G$  و  $S = M$

وليفته عامة :- اذا كان  $p \leq 6$  و  $6 \leq q \leq 10$  ..... كليات متناهية

و فرضنا  $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{p}{s} = \frac{p}{e}$  ..... =  $\frac{p}{s}$

وهذا

- $P = P$
- $S = ج$
- $W = هـ$

۱)  $\therefore$   $\frac{P}{P_0} = \frac{r}{r_0} = \frac{v}{v_0}$  اور  $\frac{P}{P_0} = \frac{v}{v_0}$

$\frac{P}{r} = \frac{C}{\Sigma} = \frac{P}{7} \leftarrow (\text{بالنسبة على 10}) \quad P \Sigma = C r = P C \therefore$   
 $r : \Sigma : 7 = P : C : P \therefore$

$$3:2:1 = p:q:r \therefore$$

مسائل ۵ :-

إذا كان  $p, q, r$  كميات متناسبة أثبت أن  $\frac{p+r}{s+r} = \frac{p+q}{s+q}$

$p_0 = p \rightarrow p = \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \therefore$  کیات متساویہ ::

$$P_S = P \leftarrow$$

$$\frac{P_1 S^3 + P_2 O^3}{S^3 + O^3} = \frac{P_1 X^3 + P_2 Y^3}{S^3 + O^3} \quad \frac{P_1 + P_2}{S^3 + O^3} = \text{الطرف الاخير}$$

$$\textcircled{1} \leftarrow m = \frac{(s+b)m}{s+b} =$$

$$\textcircled{1} \leftarrow m = \frac{(s+b)m}{s+b} = \frac{ms+bm}{s+b} = \frac{s+p}{s+b} = \text{الطرف الآخر}$$

منه  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  ينتج أنه الطرف الأيسر = الطرف الآخر #

إذا كان  $p, b, c, d, s$  كميات متناسبة أثبت أنه :- \*\*\*  
تدريج\*\*\*

$$\frac{p}{s} = \frac{p_0 - p_c}{s_0 - s_c} \quad \textcircled{2} \quad \frac{p}{b} = \frac{p_2 + p}{s_3 + c} \quad \textcircled{1}$$

مثال  $\textcircled{3}$  :-

$$\frac{c}{s} = \frac{c_0 - c_c}{s_0 - s_c} = \left( \frac{m+n}{l+g} \right) \text{ إذا كان } s, m, c, g, l \text{ كميات متناسبة أثبت أنه}$$

الحل :-

$$s, m, c, g, l \text{ كميات متناسبة} \Leftrightarrow m = \frac{c}{s} = \frac{c_0}{s_0} \Leftrightarrow \begin{matrix} ms = c \\ ms = c_0 \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{m}{c} = \frac{(1+m)}{l+g} = \frac{(m+n)}{l+m} = \frac{(m+n)}{l+g} \text{ الطرف الآخر :-}$$

$$\textcircled{2} \leftarrow \frac{m}{c} = \frac{(3+c_0)m}{(3+m_0)m} = \frac{3m + c_0m}{3m + m_0m} = \frac{c_0 + 3}{c_0 + 3} \text{ الطرف الآخر :-}$$

منه  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  ينتج أنه الطرفان متساويان .

مثال  $\textcircled{4}$  :-

$$\frac{c}{s} = \frac{c_0 + p}{b} \text{ إذا كان } p, b, c, d, s \text{ كميات متناسبة أثبت أنه}$$

الحل :-

$$p, b, c, d, s \text{ كميات متناسبة} \Leftrightarrow m = \frac{c}{s} = \frac{p}{b} \Leftrightarrow \begin{matrix} mb = p \\ ms = c \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} \leftarrow 1+m = \frac{(1+m)b}{b} = \frac{b + m}{b} = \frac{b + p}{b} = \text{الطرف الآخر}$$



قاعدة :- إذا كان  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{h}{o} = \dots$

وكانت  $p, q, r, s, h, o, \dots$  أعداد حقيقية  $\neq$  الصفر فإن :-

$$\text{واحدى النسب} = \frac{p+q+r+h+\dots}{o+s+r+\dots}$$

• أى أنه :- يمكن ضرب عدد أى نسبة فى عدد ثابت وجمع مقدمات وتوابع النسب يكونه الناتج مساوياً واحدى النسب

مثال ① :- إذا كان  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{h}{o} = \dots$  أثبت أن  $\frac{p+q}{o} = \frac{p-r}{v} = \frac{p-o}{s} = \frac{p+q+r}{v+s}$  الخطوة :-

١- جمع مقدمات وتوابع النسبتين الأولى والثالثة :-

$$\Leftarrow \frac{p+q+r}{v+s} = \text{واحدى النسب} \Leftarrow \frac{p+q}{o} = \text{واحدى النسب} \Leftarrow \text{①}$$

٢- نجمع مقدمات وتوابع النسبتين الثانية والثالثة :-

$$\Leftarrow \frac{p-r+h}{v+o} = \text{واحدى النسب} \Leftarrow \frac{p-r}{s} = \text{واحدى النسب} \Leftarrow \text{②}$$

\* من حالة تساوى نسبتيين يمكن اختصار بسط مع بسط أو مقام مع مقام

من ① و ② ينتج أن  $\frac{p-r}{s} = \frac{p+q}{o+s}$

$$\Leftarrow \boxed{\frac{p-r}{s} = \frac{p+q}{o}} \Leftarrow \#$$

مثال ⑤ :-

$$\frac{3+8}{7} = \frac{8+5}{3} = \frac{5+5}{o}$$

$$\text{أثبت أن } \frac{8+5+5}{v} = \frac{8-5}{c}$$

الحل :-

① يفترض هدى النسبة الثانية من (١) وجميع مقدمات وتوابع النسبتين الأولى والثانية :-

$$\text{إحدى النسب} \leftarrow ① = \frac{8-5}{2-0} = \frac{8-5}{2-0} \leftarrow$$

② تجمع مقدمات وتوابع النسب الثلاثة :-

$$\frac{8+5+5}{7+3+0} = \frac{(8+5+5) \times 1}{7+3+0} = \frac{8+5+5}{7+3+0} = \frac{8+5+5}{7+3+0}$$

$$\text{إحدى النسب} \leftarrow ② = \frac{8+5+5}{7+3+0} = \frac{8-5}{2-0} \quad \text{منه ①، ② يتبع أن}$$

مثال ③ :-

$$\frac{8+5}{2-0} = \frac{8-5}{2-0} \quad \text{فأثبت أن} \quad \frac{8}{2-0} = \frac{5}{2-0} = \frac{5}{2-0}$$

الطريق :-

① يفترض هدى النسبة الثانية من (٢) والثالثة من (١) والمجمع :-

$$\text{إحدى النسب} \leftarrow ① = \frac{8-5}{2-0} = \frac{8-5}{2-0} \leftarrow$$

② يفترض هدى النسبة الثالثة من (٢) وجميع النسبتين الثانية والثالثة :-

$$\text{إحدى النسب} \leftarrow ② = \frac{8+5}{2-0} = \frac{8+5}{2-0} \leftarrow$$

$$\text{منه ①، ② يتبع أن} \quad \frac{8+5}{2-0} = \frac{8-5}{2-0}$$

مثال ④ :-

$$\frac{5}{5} = \frac{P}{5} \quad \text{فأثبت أن} \quad \frac{P+5}{5+5} = \frac{5+P}{5+5}$$



$$\textcircled{5} \text{ إذا كان } \frac{8}{5} = \frac{5}{2} = \frac{5}{3} \text{ أثبت أن } 3^2 + 5^2 + 5^2 = 5^2 + 5^2 + 5^2$$

$$\textcircled{6} \text{ إذا كان } P, Q, R \text{ كميات متساوية أثبت أن } :-$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{P}{Q} = \frac{Q+P}{S+Q} & - \text{ب} \\ \frac{Q+P}{S+Q} = \frac{3Q^2 - 3PQ}{3S^2 - 2Q^2} & - \text{ج} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كان } \frac{5}{2} = \frac{5}{3} = \frac{P}{Q} \text{ أثبت أن } \frac{5+Q-P}{5-2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{3} = \frac{P}{Q}$$

$$\textcircled{3} \text{ إذا كان } \frac{5}{P-Q} = \frac{5}{Q+P} = \frac{5}{5+P} \text{ أثبت أن } \frac{5+Q+P}{P-Q+P} = \frac{5+Q+P}{Q+P+P}$$

$$\textcircled{7} \text{ إذا كان } \frac{5+Q}{7} = \frac{8+Q}{5} = \frac{5+Q}{3} \text{ أثبت أن } \frac{5+Q+5}{8^2+5^2+5^2} = \frac{7}{19}$$

$$\textcircled{5} \text{ إذا كان } \frac{8+Q}{5} = \frac{5+Q}{7} = \frac{5+Q}{V} \text{ أثبت أن } \frac{8+Q+5}{8-5} = \frac{5+Q+5}{1}$$

$$\textcircled{8} \text{ إذا كان } \frac{P}{5+Q} = \frac{Q}{5Q-5} = \frac{P}{5Q-5} \text{ أثبت أن } \frac{Q-P}{5Q+5-3} = \frac{P+Q}{5Q-5}$$

$$\textcircled{9} \text{ إذا كان } \frac{5+Q}{8} = \frac{5}{5} = \frac{5}{8-5} \text{ أثبت أن كل واحد من هذه النسب يساوي 2}$$

يساوي 2 « كل واحد من هذه النسب يساوي 2 » ثم أثبت أن كل واحد من هذه النسب يساوي 2

مكتبة وسام  
شعير - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات  
01004423597 - 3943035



## ١٤ "النسب المتسلسل"

\* إذا كان لدينا الأعداد ٢٧ ٦ ٩ ٣  
 $\frac{1}{3} = \frac{9}{27} \quad \frac{1}{6} = \frac{9}{54} \quad \frac{1}{9} = \frac{3}{27}$  أي أن

وعلى ذلك نقول أن الأعداد ٢٧ ٦ ٩ ٣ من نسب متسلسل

ملاحظة: يقال أن الكميات  $P, Q, R$  من نسب متسلسل إذا كان  $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R}$   
 ويسمى  $P$  بالأول،  $Q$  بالثاني،  $R$  بالثالث، النسب المتسلسل  
 أما  $P$  بالوسط المتناسب.

\*  $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} \Leftrightarrow P = \frac{Q^2}{R} \Leftrightarrow P \pm = \frac{Q^2}{R \pm}$

أي أن الوسط المتناسب بين كيتين  $P \pm = \frac{Q^2}{R \pm}$  حاصل ضرب الكيتين

مثال ٥:- أوجد الوسط المتناسب "لوسط الهندس" بين الكيتين:-  
 ١- ٢٧ ٦ ٩  $\frac{1}{3} = \frac{9}{27} \quad \frac{1}{6} = \frac{9}{54}$   
 الحل:-

١- الوسط المتناسب  $= \frac{27 \times 9}{6} = 40.5$

٢- الوسط المتناسب  $= \frac{18 \times 18}{12} = 27$

٣- الوسط المتناسب  $= \frac{P^2}{Q} = \frac{9^2}{6} = 13.5$

تدريب \* أوجد الوسط المتناسب بين كل من الكيتين الآتيتين:-

١) ١٥ ٦ ٩  $\frac{1}{3} = \frac{9}{27} \quad \frac{1}{6} = \frac{9}{54}$

مثال ٥ :- إذا كانت  $s$  وسط متناسب بين  $(1-s)$  و  $(s+c)$  أوجد قيمة  $s$ .  
الحل :-

$$s \text{ وسط متناسب بين } (1-s) \text{ و } (s+c)$$

$$\therefore s = (1-s)(s+c) \Rightarrow \frac{s}{s+c} = \frac{1-s}{s+c} \Rightarrow s = 1-s$$

$$\therefore s - s = 1 - s \Rightarrow \boxed{s = 1}$$

مثال ٦ :- أوجد الأول المتناسب بين ١٦ و ٨  
الحل :-

لنفرض الأول المتناسب  $s$   $\Leftarrow s = 16 \times 8$  من تناسب متصل

$$\therefore \frac{s}{16} = \frac{8}{s} \Rightarrow s = \frac{8 \times 16}{8} = 16$$

:- الأول المتناسب هو ١٦

ملاحظة :- إذا كان  $p, b, c$  من تناسب متصل وفرضنا أنه

$$\frac{p}{b} = \frac{c}{b} = 2 \text{ فإنه } p = b = 2 \text{ و } b = c = 2$$

$$\text{بالقوة ٥ من ١} \Rightarrow p = (b)^2 = 2 \Rightarrow b = c = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} b = c \\ p = b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{b} = \frac{c}{b} = 2 \Rightarrow p = b = c$$

مثال ٧ :-

$$\text{إذا كان } p, b, c \text{ من تناسب متصل أثبت أنه } \frac{p-b}{b} = \frac{p-c}{b+c}$$

الحل :-

$$\therefore p, b, c \text{ من تناسب متصل } \therefore \frac{p}{b} = \frac{c}{b} = 2 \Rightarrow p = b = c$$

$$\left. \begin{array}{l} b = c \\ p = b \end{array} \right\}$$

$$\frac{p-b}{b} = \frac{p-c}{b+c} = \frac{p-b}{b+c} = \frac{p-b}{b+c} = \frac{p-b}{b+c}$$



$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{1}{m} = \frac{(1+m+m^2)\frac{1}{m}}{1+m+m^2} = \frac{\frac{1}{m} + 1 + m}{1+m+m^2} \leftarrow$$

منه ① ② يتبع أنه الطرفان متساويان

$$\frac{p-p}{p+p} = \frac{b-p}{p} \quad \text{***} \quad \text{تدريج} \quad \text{***} \quad \text{إذا كان } b \text{ وسط متناسب بين } p \text{ و } b \text{ أثبت أنه} \quad \frac{p-p}{p+p} = \frac{b-p}{p}$$

تعريف التناسب المتسلسل :-

\* إذا كان الكليات  $p, b, s$  من تناسب متسلسل  
فإن  $\frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s}$

\* إذا كان  $p, b, s$  من تناسب متسلسل وفرضنا أنه  $\frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s}$

$$\left[ \begin{array}{l} ps = b \\ p^2 s = b^2 \\ p^3 s = p^2 \end{array} \right] \leftarrow \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \leftarrow$$

$$\textcircled{1} \text{ مثال :- إذا كان } p, b, s \text{ من تناسب متسلسل أثبت أنه } \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \quad \text{الحل :-}$$

$$\left[ \begin{array}{l} ps = b \\ p^2 s = b^2 \\ p^3 s = p^2 \end{array} \right] \leftarrow \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \leftarrow$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \quad \text{الطرف الأيسر} = \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s}$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s} \quad \text{الطرف الأيمن} = \frac{p}{s} = \frac{b}{p} = \frac{p}{s} = \frac{p}{s}$$

منه ① ② يتبع أنه الطرفان متساويان .

\* \* \* تنبيه \* \* \* إذا كان  $P, b, c$  من تناسب متساوي أثبت أنه  $\frac{P}{b} = \frac{c - P}{c - b}$  \* \* \*

مثال ٨ :- إذا كان  $\frac{P}{b} = \frac{c - P}{c - b}$  أثبت أنه  $b$  وسط تناسب بين  $P$  و  $c$  حيث  $P + b \neq 0$

الحل :-  $\frac{P}{b} = \frac{c - P}{c - b} \Leftrightarrow P(c - b) = b(c - P) \Leftrightarrow P^c - P^b = b^c - b^b$

$\Leftrightarrow P^c + b^b = P^b + b^c \Leftrightarrow (P + b)^c = (P + b)^b \Leftrightarrow P = b$    
  $\therefore P = b$   $\therefore b$  وسط تناسب بين  $P$  و  $c$  #

مثال ٩ :- إذا كانت الكميات  $P, b, c$  من تناسب متساوي أثبت أنه  $(b + c)$  وسط تناسب بين  $(b + P)$  و  $(c + P)$

الحل :-   
 لأثبت أنه  $(b + c)$  وسط تناسب بين  $(b + P)$  و  $(c + P)$    
 يجب إثبات أنه  $\frac{b + P}{b + c} = \frac{c + P}{c + b}$  \*

$\begin{matrix} m_s = b \\ m_s = c \\ m_s = P \end{matrix} \Leftrightarrow m = \frac{b}{s} = \frac{c}{s} = \frac{P}{s} \Leftrightarrow P, b, c$  من تناسب متساوي

\* الطرف الأيسر :-  $m = \frac{(1+m)s}{(1+m)s} = \frac{m_s + m_s}{m_s + m_s} = \frac{b + P}{b + c}$

\* الطرف الأيمن :-  $m = \frac{(1+m)s}{(1+m)s} = \frac{m_s + m_s}{s + m_s} = \frac{b + c}{s + b}$

من ١ و ٢ يتبع أنه طرف العلاقة متساويان

$\therefore (b + c)$  وسط تناسب بين  $(b + P)$  و  $(c + P)$



### (٣) "التغير الطردي والتغير العكسي"

#### أولاً: التغير الطردي :-

طول نصف قطر "نعم"	٧	١٤	٢١
محيط الدائرة (ح)	٤٤	٨٨	١٣٢

\* الجدول المقابل يوضح

العلاقة بين طول نصف قطر دائرة "نعم"

ومحيطها "ح" وإذا أخذنا قيمته لطول نصف قطر ونفرجه أنها نعم = ٧ ، نعم = ٢١ ، والقيمتان المناظرتان للمحيط = ٤٤ ، ح = ١٣٢ نجد أنه :-

$$\frac{1}{\text{نعم}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\text{نعم}} = \frac{44}{132} = \frac{1}{3}$$

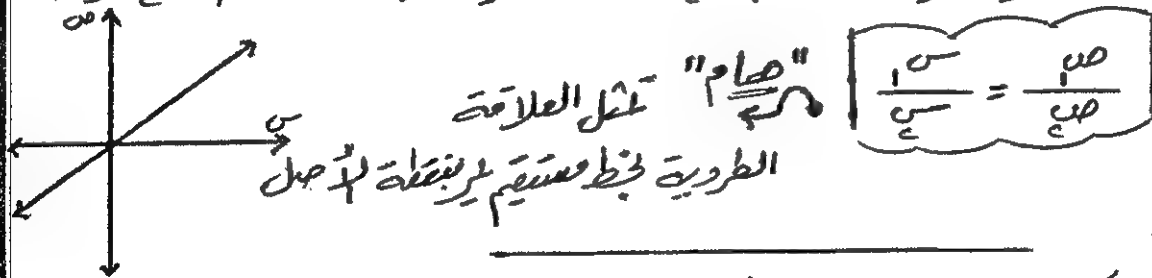
أي أنه :- نسبة التغير في طول نصف القطر تقابل نسبة التغير في المحيط بنفس النسبة  
 حينئذ يقال أنه العلاقة بين نعم ، ح هي علاقة تغير طردي أو تناسب طردي وتكتب (ح ، نعم)

#### تعريف :-

\* يقال أنه من تغير طردياً مع س وتكتب من ط س إذا كان :-

$$\boxed{ص = م \cdot س} \quad \text{حيث } م \neq 0 \quad \text{أو} \quad \boxed{\frac{ص}{س} = م} \quad \text{حيث ثابت القياس}$$

\* وإذا أخذنا قيمتين للتغير ص وصا ، س وسا وأخذنا قيمتين للتغير م ومسا ، مسا فإن :-



مثال ① :- إذا كانت من ٧ س وكانت ص = ١٥ عند س = ١٠

أوجد من عند س = ٤

الحل :- ∵ من ٧ س ∴  $\frac{ص}{س} = م$  ← نفس العلاقة بين س و ص  
 ∴  $\frac{15}{10} = م$  ←  $\frac{ص}{4} = م$  ∴  $ص = 6$







\* \* \* \* \*  
 \* \* \* \* \*  
 إذا كانت  $0 + 0 = 0$  وكانت  $0$  من كل فائدة كانت  
 من  $13 = 13$  عند  $2$ ، أو بعد العلاقة بين  $0$  و  $1$  ثم أو بعد  
 قيمة  $0$  من  $0$  عند  $3$ .

## ثانياً :- التفرع العكس :-

\* يقال أن  $0$  من تفرع عكسياً مع  $0$  وتلقب من  $0$   $\frac{1}{0}$   
 إذا كان  $0 = \frac{2}{0}$  أو  $0 = 0 - 0$ .

\* وإذا أخذ المتفرع القيمين  $0$  و  $0$  وأخذ المتفرع القيمين  $0$  و  $0$  فإنه :-

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

هـ "عند باله" المقارنة بين التفرع الطردى والتفرع العكس

### II التفرع الطردى

\* من  $0$  من

←  $0 = 0 - 0$  أو  $0 = \frac{0}{0}$

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

### III التفرع العكس

\* من  $0$  من  $\frac{1}{0}$

←  $0 = \frac{2}{0}$  أو  $0 = 0 - 0$

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

مثال ① :- إذا كانت  $0$  من تفرع عكسياً مع  $0$  وكانت  $0 = 0$  عند  $3$   
 أو بعد العلاقة بين  $0$  و  $0$  ثم أو بعد قيمة  $0$  عند  $6$

الطرد :-

:- من  $0$  من  $\frac{1}{0}$  ←  $0 = \frac{2}{0}$  أو  $0 = 0 - 0$  ← نفس العلاقة بين  $0$  و  $0$

← عند  $3 = 0$  و  $0 = 0$  ←  $0 = 3 \times 0$  ←  $0 = 0$





١٢ اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان  $x$  من تغير عليا مع  $y$ ، ما له ثابت التناسب  $k$  فإنه .....  
 (أ)  $x = 0$  (ب)  $y = 0$  (ج)  $x = 0$  (د)  $y = 0$ ② إذا كان  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 3$  فإنه ثابت التغير = .....  
 (أ) 10 (ب) 0 (ج) 3 (د) 0③ إذا كانت  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 3$  فإنه ثابت التناسب = .....  
 (أ) 3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 0④ إذا كانت  $x$  من  $y$  فإنه من تناسب .....  
 (أ) طرديًا مع  $y$  (ب) عكسيًا مع  $y$  (ج) عكسيًا مع  $x$  (د) عكسيًا مع  $x$ ⑤ إذا كانت التكلفة الكلية (أ) لرحلة ما بقدر ثابت (ب) والآخريناسب طردي مع  
 عدد المشتركين (ج) فإنه .....  
 (أ)  $x - P = 0$  (ب)  $x = 0$  (ج)  $x + P = 0$  (د)  $x + P = 0$ ⑥ إذا كانت  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 7$  فأوجد العلاقة بين  
 $x$  و  $y$  ثم أوجد قيمة  $x$  عندما  $y = 12$ .⑦ إذا كانت  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 10$  فأوجد  
 قيمة  $x$  عندما  $y = 0$  ثم أوجد العلاقة بين  $x$  و  $y$ .⑧ إذا كانت  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 12$  فأوجد العلاقة  
 بين  $x$  و  $y$  ثم أوجد قيمة  $x$  عندما  $y = 70$ .⑨ إذا كانت  $x$  من  $y$  وكانت  $x = 0$  عندما  $y = 3$  فأوجد العلاقة  
 بين  $x$  و  $y$  ثم أوجد قيمة  $x$  عندما  $y = 50$ .⑩ إذا كانت  $x$  من  $y$  المعطوس الضرب للمقدار  $\frac{1}{x}$  فأوجد العلاقة  
 بين  $x$  و  $y$  إذا علم أن  $x = 0$  عندما  $y = 3$ .⑪ إذا كان  $x$  من  $y$  (أ)  $x + y = 0$  فأوجد العلاقة بين  $x$  و  $y$  إذا كانت  
 $x = 3$  عندما  $y = 0$ ⑫ إذا كان  $x$  من  $y$  أثبت أن  $x$  من  $y$ .

- ٨) إذا كان  $s = 14$  و  $p = 49$  ، أثبت أن  $v = \frac{1}{3}$  .
- ٩) إذا كانت  $p = 9$  وكانت  $v = \frac{1}{3}$  وكانت  $p = 18$  عندما  $s = \frac{2}{3}$  ، فأوجد العلاقة بين  $s$  و  $p$  ثم استنتج قيمة  $p$  عندما  $s = 1$  .
- ١٠) إذا كانت  $s = 8 + s$  وكانت  $s$  تناسب عكسياً مع  $p$  وكانت  $s = 2$  عندما  $p = 3$  ، أوجد  $p$  عندما  $s = 3$  .
- ١١) إذا كانت  $s + p = \frac{1}{s} + \frac{1}{p}$  ، أثبت أن  $v = \frac{1}{s}$  .
- ١٢) إذا كان وزنه جسم على القمر (و) يتناسب طردياً مع وزنه على الأرض (ج) وكان الجسم يزن ٨٤ كجم على الأرض ، ووزنه ٤ كجم على القمر ، فإذا يكون وزنه الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كجم ؟
- ١٣) إذا كان عدد الساعات (ن) اللازم لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في ٤ ساعات ، فما الزمن اللازم الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟
- ١٤) إذا كان مقدار السرعة (ع) التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (ن) ، وكانت  $s = 5$  سم ،  $t = 3$  سم ، أوجد  $s$  عندما  $t = 5$  سم .
- ١٥) من بيانات الجدول التالي أجب على الأسئلة الآتية :-

س	٢	٤	٦
ن	٦	٣	٢

- ١) بين نوع التغير بين  $s$  و  $n$  .
- ٢) أوجد ثابت التناسب .
- ٣) أوجد قيمة  $n$  عندما  $s = 3$  .
- ٤) أوجد قيمة  $s$  عندما  $n = \frac{2}{3}$  .

اختبار الوحدة

● إذا كان  $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+ج}{٦} = \frac{ج+د}{٥}$  فأثبت أن:  $أ+ب+ج+د = ٧$ .

● إذا كان ص = ١ - ٩ وكان ص  $\infty$   $\frac{١}{س}$  وكان ١ = ١٨ عندما س =  $\frac{٢}{٣}$  فأوجد العلاقة بين ص، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١.

● إذا كان  $\frac{٢١-ص}{٧-س} = \frac{ص}{ع}$  فأثبت أن ص = ٢١.

● إذا كان س<sup>٤</sup> ص<sup>٢</sup> - ١٤ س<sup>٢</sup> ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن ص  $\infty$   $\frac{١}{س}$ .

● الربط بالملك: إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان و = ١٨٢ كجم، ر = ٣٥ كجم فأوجد ر عندما و = ٣١٢ كجم.

● الربط بالفيثاغورس: إذا كان مقدار السرعة ع التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ث عندما ن = ٣ سم. أوجد ع عندما ن = ٢,٥ سم.

## الوحدة الثالثة : -

# الاحصاء

(1) جمع البيانات

(2) النُشُت

مكتبة وسام  
شربين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بسات  
01004423597\_3943035



## جمع البيانات

### مصادر جمع البيانات

- مصادر أولية (مصادر ميدانية) ونحصل عليها عن طريق المقابلة الشخصية
- مصادر ثانوية (تاريخية) ونحصل عليها من هيئات رسمية أو الجهاز المركزي أو الإنترنت

### أسلوب جمع البيانات

- أسلوب الحصر الشامل** وهو يشمل جميع أفراد المجتمع
  - ومميزاته : الدقة والشمولية
  - وعيوبها : تحتاج وقت طويل وأموال باهظة
- أسلوب العينات** وهي تشمل مجموعة جزئية من المجتمع بحيث لا تقل عن ١٠%
  - مميزاته : توفير الوقت والجهد وهي الأسلوب الوحيد للمجتمعات الكبيرة مثل مجتمع الأسماك
  - وعيوبها : عدم الدقة وعدم الشمولية

### كيفية اختيار العينات :

- عينة عشوائية** وهو إقامة التجربة أولاً ثم الاختيار من الأفراد ثم سؤالهم وكتابة النتائج مثل شرح الدرس ثم اختيار بعض الأفراد ثم كتابة النتائج (التجربة ثم الاختيار ثم السؤال)
- عينة عمدية** وهو اختيار متحيز ويتم اختيار عدد من الأفراد ثم إقامة التجربة ثم سؤالهم ثم كتابة النتائج مثل اختيار عدد من الأفراد ثم شرح لهم درس معين ثم سؤال على مدى فهم الدرس (اختيار ثم تجربة ثم السؤال)

### أنواع العينات العشوائية

- العينة العشوائية البسيطة** يكون المجتمع متجانس لا يراعى فيها الفرق بين عدد الطبقات
- العينة العشوائية الطبقية** ويكون المجتمع غير المتجانس وهو اختيار عدد أفراد العينة بنسبة متساوية من كل طبقة فإذا كنا في مجتمع به نسبة الذكور إلى الإناث ٢ : ١ فيتم اختيار أفراد العينة من الذكور ضعف أفراد العينة الإناث

### مثال

عند دراسة المستوى التعليمي لعينة عشوائية طبقية مجتمع ما مكونة من ٥٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢ وأردنا عينة ٥٠ شخصاً فلا بد أن نختار ٣٠ من الذكور و ٢٠ من الإناث . (وتسمى هذه العينة عينة طبقية)

**تدريباً**

إذا أخذت عينة من مجتمع طبقى عدده (١٠٠٠) شخص لفحص شيء ما وكانت نسبة الذكور إلى الإناث هي ٤ : ٣ ، وأخذت عينة عددها ١٤٠ ، فما هو عدد الذكور وما هو عدد الإناث ؟

**\* العينة العشوائية باستخدام الآلة الحاسبة :**

**مثال ٢**

عند اختيار عينة عشوائية لابد أن يحصل كل فرد على فرصة في الاختيار ويمكن اختيار أعضاء العينة العشوائية على أساس .

**الحل**

• إعطاء كل فرد في المجتمع رقم إلى عدد العينة = .... = .... = **Sh** **Ran**

• استخدام خاصية الرقم العشوائي الموجود بالآلة الحاسبة

نفرض أن ٢١٢ عاملاً ميكانيكياً يعملون في صيانة المركبات ويجري عليهم استبيان عن شركة كبرى لتأجير السيارات وتريد الشركة معرفة آرائهم في :

• تفادى تأخير الورش في الإصلاح بسبب عدم توافر قطع الغيار .

• زيادة ضمان المركبات باستخدامها لمسافة ١٠٠٠ كم .

• زيادة كفاءة السيارات عن طريق الفحص خارج الورش .

نفرض أننا نريد إبراز أرقام عشوائية في نطاق الصفر إلى ٢١٢ وتعتبر عينة ١٠% كافية للحصول على معلومات موثقة وبذلك يجب الحصول على ٢١ رقماً عشوائياً .

استخدم الآلة الحاسبة في إنتاج أرقام عشوائية في النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ وبذلك يمكن الحصول على نطاق مؤثر للعينة يتراوح ما بين الصفر و ٩٩٩ .

بالنسبة للأرقام من صفر إلى ٢١٢ يتم تجاهل الأرقام العشوائية التي تزيد عن ٢١٢ ولا بد من استمرار تولد الأرقام العشوائية حتى نصل إلى ١٠% من ٢١٢ وهي ٢١ رقماً عشوائياً وهذا واضح في الجزء المخصص للنشاط بعد شرح الدرس في هذه الوحدة .

نفرض أن الآلة الحاسبة قد أخرجت هذه الأرقام العشوائية باستخدام

بمذا يصبح العمال الذين يحملون هذه الأرقام من بين ٢١٢ عاملاً هم العينة المختارة لإجراء هذا الاستبيان كما يمكن توليد الأرقام العشوائية عن طريق (العشوائية) في برنامج إكسيل .

ب

١

تمارين

١

(١) أكمل

(١) القيمة الإحصائية هي جزء من أنواع العينة العشوائية عينة عشوائية ..... ، ..... (٢) عند اختيار عينة غير متعمدة من مجتمع كبير متجانس فتسمى هذه العينة بالعينة .....	(١) من أساليب جمع البيانات أسلوب ..... (٢) عند اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي يراعى فيها الفرق بين الطبقات تسمى هذه العينة .....
--	--

(١) عند التحليل لدخول الحجاج للسعودية يكون هذا مستخدماً أسلوب حصر شامل أم أسلوب العينة .	(١) قارن بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مينا مزاي وعيوب كلاً منها .
(٢) اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات في كل من : ١- معرفة حل الواجب للحصة الماضية لعدد من الطلبة عددهم ٥ . ٢- معرفة قفص من السوق للفلفل إذا كان حار أم لا . ٣- معرفة صلاحية دسنة آلات حاسبة	(٢) اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات في كل من : ١- معرفة درجة ملوحة مياه البحر . ٢- لمعرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها . ٣- معرفة سيارة بما قمح إذا كان القمح صالح أم لا .

(٣) ك م إذا كان هنالك في إحدى الكليات

الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى و ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . احسب عدد مفردات كل طبقة في العينة

(٣) ك م يراد سحب عينة عشوائية طبقية

تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة وتقسّم إلى ثلاث طبقات بيانها كالآتي :

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى في العينة ٢٤٠ مفردة أوجد عدد مفردات العينة كلها

(٤) ك م ترغب إدارة أحد الفنادق في معرفة

آراء ٣٠٠ نزيل بها في مستوى الخدمة لهم فقامت بإعطاء كل نزيل رقما ٢٠١ إلى ٥٠٠ واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة ، حدد بآلك أرقام التلاء المستهدفين في هذه العينة .

(٤) ك م قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع

رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله في فترة الراحة وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ : ٢٠٠ ثم اختيار العينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من مشروبات ساخنة أم وجبات خفيفة أم مثلجات ، حدد بآلك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين في هذه العينة.

(٥) ك م الجدول التالي يمثل عدد الطلاب في

إحدى الكليات الجامعية

الفرقة	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
عدد الطلاب	٩٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠

وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٢٠ طالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها احسب عدد مفردات كل طبقة من العينة .

(٥) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها

كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٢٠٠٠ مفردة ومقسم إلى طبقتين بيانها كالآتي

الطبقة	الأولى	الثانية
عدد الطلاب	٢٠٠	٨٠٠

فإذا كانت عدد المفردات التي تمثل الطبقتين عددهم ١٥٠ مفردة ، أوجد عدد المفردات لكل طبقة .

(٦) ك م مدرسة بها ٣٦٠ طالباً و ٤٨٠ طالبة

أرادت المدرسة عمل استبيان على عينة قوامها ٣٥ طالباً وطالبة تمثل فيها كل طقة وحجمها احسب عدد مفردات كل طبقة.

(٦) مصنع به ١٢٥ عاملاً ، ٧٥ فنياً ، ٥٠

مهندس ، ويراد أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ فردا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، احسب عدد مفردات كل طبقة في العينة .

## التشتت

نذكر: • مقاييس التفرقة المركزية :-

$$\textcircled{1} \quad \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

② المتوال: هي القيمة الأكثر تكراراً

③ الوسيط: هي القيمة التي تتوسط القيم من حيث عددهم وذلك بعد الترتيب

\* فمثلا القيم: ٣، ١، ٣، ١١، ٧

المتوال هو ٣

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{٧+١١+٣+١+٣}{٥} = ٥$$

الوسيط: (رتب تصاعدياً ١، ٣، ٣، ٧، ١١)

الوسيط هو ٣

التشتت: هو مدى بيان أو اختلاف القيم عن الوسط الحسابي

• مقاييس التشتت: المدى - الانحراف المعياري

أولاً: المدى لقيم: هو الفرق بين أصغر قيمة وأكبر قيمة

فمثلاً أوجد المدى للقيم (٩، ٦، ٤، ١٠، ١٢، ١٧) (١٢، ٦، ٨، ١٠، ٥، ٢٥)

المدى للمجموعة الأولى = ١٧ - ٤ = ١٣

المدى للمجموعة الثانية = ٢٥ - ٥ = ٢٠

وبذلك يكون التشتت في المجموعة الثانية أكبر:

لأنه ٦ قيم تشتت في مدى ٢٠ في حين أن ٦ قيم في المجموعة الأولى تشتت في مدى ١٣

ولو استبعدنا القيمة ٢٥ فيكون المدى ٧ لأن القيمة ٢٥ تشتت عن الوسط كثيراً، فجعلت التشتت أكبر

ثانياً : الانحراف المعياري : هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً وأدقها

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجموع } (s - \bar{s})^2}{n}}$$

حيث  $\sigma$  تنطق سيجما وهو الانحراف المعياري

$\bar{s}$  تنطق (س بار) وهو الوسط الحسابي ،  $n$  عدد القيم

$(s - \bar{s})$  هو انحراف القيمة عن الوسط الحسابي

أولاً : حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

مثال ١

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ٩ ، ١١

الحل

س	$\bar{s}$	$s - \bar{s}$	$(s - \bar{s})^2$
٦	٧	١-	١
٥	٧	٢-	٤
٤	٧	٣-	٩
٧	٧	٠	٠
٩	٧	٢	٤
١١	٧	٤	١٦
٣٤			

الوسط الحسابي  $\bar{s} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$$\bar{s} = \frac{١١ + ٩ + ٧ + ٤ + ٥ + ٦}{٦} = ٧$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجموع } (s - \bar{s})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٤}{٦}} \approx ٢,٣٨٠$$

أوجد الوسط الحسابي للقيم الآتية :

تدريب ١

١٧ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٥

وأوجد الانحراف المعياري

[١٦ ، ١٥٤]

مكتبة وسام  
شربل شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات  
01004423597\_3943035

ثانياً : حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f - \frac{(\sum x \cdot f)^2}{n}}{n}}$$

حيث  $\bar{x}$  القيمة أو مركز المجموعة ،  $f$  تكرار القيمة أو المجموعة ،  $\sum$  هي مجموع التكرارات ،  $\bar{x}$  الوسط الحسابي =  $\frac{\sum x \cdot f}{n}$

مثال ٢

كم فيما يلي التوزيع التكراري يوضح عدد الأهداف التي سجلت في عدد من مباريات لكرة القدم

عدد الأهداف $x$	تكرار $f$	عدد المباريات $n$
٠	١	١
١	٤	٤
٢	٦	٦
٣	٩	٩
٤	٥	٥
٥	٣	٣
٦	٢	٢

الحل

أولاً : نوجد الوسط الحسابي  $\bar{x}$  : نستخدم الجدول الآتي :

الوسط الحسابي  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n} = \frac{90}{30} = 3$$

ثانياً :

لإيجاد الانحراف تكون الجدول الآتي :

الدرجة $x$	التكرار $f$	$x \cdot f$
٠	١	٠
١	٤	٤
٢	٦	١٢
٣	٩	٢٧
٤	٥	٢٠
٥	٣	١٥
٦	٢	١٢
٩٠	٣٠	

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f - \frac{(\sum x \cdot f)^2}{n}}{n}} = \sqrt{\frac{166 - \frac{90^2}{30}}{30}} = 1.483$$

$x$	$f$	$x^2 \cdot f$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$	$(x - \bar{x})$	$\bar{x}$	$\sum$
٠	١	٠	٩	٣-	٣	٠
١	٤	٤	٤	٢-	٣	١
٢	٦	١٢	١	١-	٣	٢
٣	٩	٢٧	٠	صفر	٣	٣
٤	٥	٢٠	١	١	٣	٤
٥	٣	١٥	٤	٢	٣	٥
٦	٢	١٢	٩	٣	٣	٦
٩٠	٣٠					

**تدريب ٢**

فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات الثالثة التي وجدت في ١٠٠ صندوق في الوحدات المصنعة

عدد الوحدات الثالثة س	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق ك	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

— أوجد الانحراف المعياري للوحدات الثالثة [١,٤٢٨,٣]

**ثالثاً : الانحراف المعياري لجداول توزيع تكراري ذو مجموعات**

**مثال ٢**

فيما يلي التوزيع التكراري ذو المجموعات الآتي يبين درجات ٤٠ تلميذ في أحد الاختبارات لإحدى المواد :

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	٢٠-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٥	١٠	٥	٤٥

أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع .

**الحل**

(١) نوجد مراكز المجموعات س .

فيكون : مركز المجموعة الأولى =  $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة} + \text{الحد الأعلى}}{2} = \frac{-٤ + ٠}{2} = -٢$

مركز المجموعة الثانية =  $\frac{-٨ + -٤}{2} = -٦$  وهكذا ونسجلها في العمود الثاني

(٢) نضرب مراكز المجموعات  $\times$  التكرارات المناظرة لها ، أي س  $\times$  ك ونسجلها في العمود الرابع .

نوجد الوسط الحسابي  $\bar{س} = \frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}}$

(٣) نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابي ، أي نوجد (س -  $\bar{س}$ )

(٤) نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط عن الوسط الحسابي ، أي (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup> .

(٥) نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابي  $\times$  تكرار هذه المجموعة

أي (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup>  $\times$  ك

ملحوظة هامة في التوزيع التكراري  
ذو المجموعات ،  $\bar{س}$  وهو يعرف من  
(الشرطة) تكون (س -  $\bar{س}$ ) هو انحراف  
مركز المجموعة عن الوسط الحسابي

(٦) نحسب الانحراف المعياري  $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجموع (س - } \bar{س})^2 \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}}}$



أولاً : نوجد الوسط الحسابي  $\bar{x}$  كالآتي :

المجموعات	مراكز المجموعات س	التكرار ك	س × ك
-٠	٢	٥	١٠
-٤	٦	١٠	٦٠
-٨	١٠	١٥	١٥٠
-١٢	١٤	١٠	١٤٠
-١٦	١٨	٥	٩٠
		٤٥	٤٥٠

نلاحظ أن هذا الجدول يوجد خانة زيادة لأن المجموعات من : إلى

لاحظ : مركز المجموعة  
 = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) ÷ ٢  
 فمثلاً : أول مركز =  $\frac{-٤ + ٠}{٢} = -٢$   
 المركز الثاني =  $\frac{-٨ + -٤}{٢} = -٦$  وهكذا  
 $\bar{x} = \frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}} = \frac{٤٥٠}{٤٥} = ١٠$

ثانياً : نكون الجدول الآتي لكي نوجد الانحراف المعياري  $\sigma$

س	س	(س - $\bar{x}$ )	(س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>	ك	(س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup> × ك
٢	١٠	-٨	٦٤	٥	٣٢٠
٦	١٠	-٤	١٦	١٠	١٦٠
١٠	١٠	٠	٠	١٥	٠
١٤	١٠	٤	١٦	١٠	١٦٠
١٨	١٠	٨	٦٤	٥	٣٢٠
			١٦٠	٤٥	٩٦٠

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجموع (س - } \bar{x} \text{)}^2 \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٩٦٠}{٤٥}} = ٤,٦١٨$$

تدريب ٢

أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي وأوجد الانحراف المعياري :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

[٢١، ٤٣٣، ٩]

**مثال:**

التوزيع التكرارى التالى يبين كمية الزيت التى تستهلكها مجموعة من السيارات:

عدد السيارات	٦	٩	١٣	١٧	١١	١٣	١٧-١٥	المجموع
عدد الكيلومترات لكل لتر	٦	٩	١٣	١٧	١١	١٣	١٧-١٥	٦٠

كون جدول الانحراف المعيارى ، ثم احسب :

(١) الوسط الحسابى (٢) الانحراف المعيارى

**الحل**

أولاً : نوجد الوسط الحسابى :

المجموعات	المركّز	ك	س × ك
-٥	٦	٦	٣٦
-٧	٨	٩	٧٢
-٩	١٠	١٣	١٣٠
-١١	١٢	١٧	٢٠٤
-١٣	١٤	١١	١٥٤
-١٥	١٦	٤	٦٤
		٦٠	٦٦٠

$$\text{مركز المجموعة الأولى} = \frac{٧+٥}{٢} = ٦$$

$$\text{مركز المجموعة الثانية} = \frac{٩+٧}{٢} = ٨$$

$$\text{الوسط الحسابى} = \bar{س} = \frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}}$$

$$= \frac{٦٦٠}{٦٠} = ١١$$

ثانياً : تكون الجدول الآتى لإيجاد الانحراف المعيارى

س	س	(س - س)	(س - س)²	ك	(س - س) × ك
٦	١١	-٥	٢٥	٦	-٣٠
٨	١١	-٣	٩	٩	-٢٧
١٠	١١	-١	١	١٣	-١٣
١٢	١١	١	١	١٧	١٧
١٤	١١	٣	٩	١١	٣٣
١٦	١١	٥	٢٥	٤	٢٠
				٦٠	٤٦٠

الانحراف المعيارى =

$$\sqrt{\frac{\text{مجموع (س - س)²} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}}} = \sigma$$

$$= \sqrt{\frac{٤٦٠}{٦٠}} = ٢,٧٦٨$$

**تمارين**

**ب**

**أ**

(١) أوجد المدى لمجموعة القيم الآتية :

١٠، ١٨، ١١، ٧، ٨، ٦ (١)	٩، ١٠، ٢، ٤، ٥ (١)
١٤، ١٢، ١، ٥، ٨، ٧ (٢)	١٩، ٧، ٩، ١٨، ١٧ (٢)

(٢) **ك.م** احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الآتية :

٦، ٩، ٨، ٧، ٥ (١)	٢٧، ٢٠، ٥، ٣٢، ١٦ (١)
١٦، ١٨، ٦، ٣٠، ١٥ (٢)	٥٩، ٧٠، ٦١، ٥٣، ٧٢ (٢)
٧٧، ٥٠، ٨٨، ٩١، ٤٦، ٨٥، ٣٩ (٣)	٦٠، ٢٧، ٩٠، ١٢٠، ١٥ (٣)
١٠، ٣٧، ٩، ٨، ١٦، ١٥، ١٣، ١٧، ١٢، ٢٣ (٤)	٨، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ٢٢ (٤)

(٢) **ك.م** التوزيع التكراري التالي بين عدد أطفال

بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد

الأطفال

[٠,٩٥٩,٢]

(٣) **ك.م** فيما يلي توزيع تكراري بين أعمار

١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات

[١,٧٣٢,٩]

(٤) أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري

الدرجة	٤	٩	١٢	١٥	١٨	المجموع
التكرار	٦	٧	٨	٥	٤	٣٠

[٤,٤٩٤,١١]

(٤) أوجد الانحراف المعياري

الدرجة	٢	٢	٤	٥	٦	المجموع
عدد الطلاب	١	٤	٥	٤	١	١٥

[٢,٤]

(٥) أكمل

(٥) أكمل

(١) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = .....	(١) مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$ .....
(٢) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة بيانات يسمى .....	(٢) الوسط الحسابي من مقياس الدرجة المركزية أما المدى من مقياس .....
(٣) من مقياس التشتت المدى و.....	(٣) من مقياس التشتت ..... ، .....
(٤) المدى للقيم (٩ ، ٦ ، ٥ ، ١٢) هو .....	(٤) المدى للقيم (٤ ، ٢ ، ٩ ، ١٥) هو .....
(٥) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربع الانحرافات القيم عن وسطهما الحسابي يعطى .....	(٥) إذا كان مجموع (س - س) = ٤٥ ، حيث س هي القيم ، س وسطهما الحسابي فإذا كان عدد القيم = ٥ ، فإن الانحراف المعياري = .....
(٦) إذا كان مجموع مربع انحرافات عشرة قيم عن وسطهما الحسابي = ٢٥٠ ، فإن الانحراف المعياري لهذه القيم = .....	(٦) الانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٦ ، ٧ يساوي $\sqrt{\frac{.....}{3}}$
(٧) إذا كان المدى لمجموعة من القيم هو ٤٠ وكان أصغر القيم ١٧ ، فإن أكبر القيم يساوي .....	(٧) إذا كان ٧٨ هي أكبر مفردات مجموعة ، وإذا كان المدى يساوي ٣٩ ، فإن أصغر قيمة لمفردات هذه المجموعة يساوي ...
(٨) يكون الانحراف المعياري مساوياً صفر إذا كانت القيم .....	(٨) الانحراف المعياري لقيم متساوية = ....
(٩) إذا كان مجموع مربع انحرافات عشرة قيم عن وسطها الحسابي تساوي ٢٥٠ ، فإن الانحراف المعياري للقيم = .....	(٩) إذا كان مجموع (س - س) = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩ فإن $\sigma = \dots$

(٦) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع الآتي : (محافظة حلوان)

الدرجة	٠	٤	٨	١٢	١٦-٢٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٤	٨	٤	٢	٢٠

[٦,١٦٤,١٠]

(٦) الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٤٠ طالب

السن	٥	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري

[١١,٣٥٧,٣١]

٧) الجدول الآتي يبين درجات تلاميذ في الصف الثالث الإعدادي							٧) الجدول الآتي يبين درجات تلاميذ في الصف الثالث الإعدادي						
الدرجة							الدرجة						
٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	المجموع	عدد التلاميذ	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	المجموع	عدد التلاميذ
٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠		٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠	
أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري							أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري						
[١٠,٩٥٤,٣٠]							[١٠,٧٢٣,٣٠]						

(٨) التوزيع التكرارى بين أوزان ٥٠ طفلا بالكجم

الوزن	٥	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

[١٢,٨٤٥,٣١]

(٨) التوزيع التكرارى الآتى يبين كمية

البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات

عدد الكيلومترات	٥	٦	٩	١١	١٢	١٥	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١١	١٢	٤	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلومترات لكل متر

[٢,٦٨٣,١١]

# الاجتماع

في

## الرياضيات

ثانياً: - حساب المثلثات  
والهندسة

## الوحده الرابعه :-

# حساب المثلثات

(١) النسب المثلثية الاساسية للزاويه الحاده

(2) النسب المثلثية الاساسية لبعض الزوايا





\* \* \* تدريبي \* \* \* زاويتاه متتامتان النسبة بينهما ٦ : ٥ أوجد القياس السنين لكل منهما.

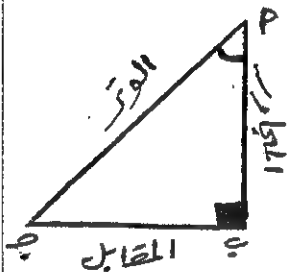
## \* النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :-

هنا نسبة بين طولي ضلعيه

منه أخرج المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية .

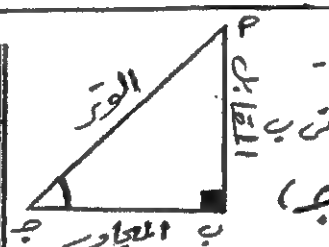
كما توجد ثلاثه نسب مثلثية أساسية للزاوية الحادة وهى :-

- ① جيب الزاوية ويرمز له بالرمز (جا) وبالانجليزية (sin)
- ② جيب تمام الزاوية ويرمز له بالرمز (جتا) وبالانجليزية (cos)
- ③ ظل الزاوية ويرمز له بالرمز (ظا) وبالانجليزية (tan)



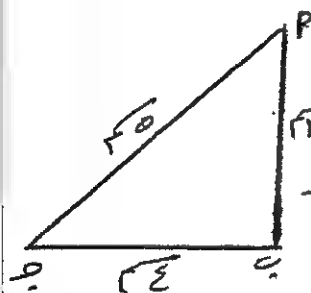
\* من الشكل المقابل :-  
 PD بـ قائم الزاوية من ب  
 بالنسبة للزاوية (P)

$$\begin{aligned} \text{① جا } P &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{PB}{PA} \\ \text{② جتا } P &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BA}{PA} \\ \text{③ ظا } P &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{PB}{BA} \end{aligned}$$



\* من الشكل المقابل :-  
 PD بـ قائم الزاوية من ب  
 بالنسبة للزاوية (B)

$$\begin{aligned} \text{① جا } B &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{PA}{PB} \\ \text{② جتا } B &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BA}{PB} \\ \text{③ ظا } B &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{PA}{BA} \end{aligned}$$



مثال ٣ :- من الشكل المقابل :-  
 PD بـ قائم الزاوية من ب  
 P = ٦٠° ، B = ٣٠° ، A = ٩٠°  
 أوجد النسب المثلثية للزاوية P

بالنسبة للزاوية (P)

$$\begin{aligned} \text{① جا } P &= \frac{6}{10} \\ \text{② جتا } P &= \frac{8}{10} \\ \text{③ ظا } P &= \frac{6}{8} \end{aligned}$$

بالنسبة للزاوية (B)

$$\begin{aligned} \text{① جا } B &= \frac{3}{6} \\ \text{② جتا } B &= \frac{8}{10} \\ \text{③ ظا } B &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$



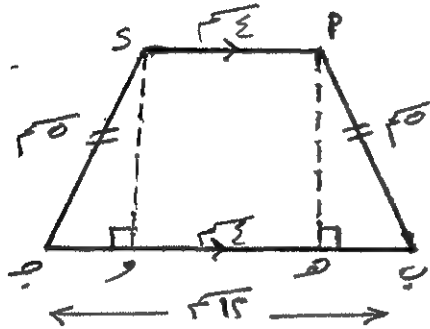


الحل :- جانب + جانب =  $\frac{12}{10} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10} = 1 < 1$  #

مثال ٨) P دى شبة منحرف متساوى الساقين فيه  $SP \parallel BC$  و

$SP = 4$  سم ،  $BP = 5$  سم ،  $BC = 12$  سم

أثبت أنه  $\frac{\text{مساحة شبة}}{\text{جانب + جانب}} = 3$  وأوجد مساحة شبة المنحرف .



الحل :-

العل :- نرسم  $PQ \perp BC$  و  $SR \perp BC$  على  $BC$

فيلوئى الشكل  $PQR$  و  $SR$  مستطيل

$\therefore SP = QR = 4$  سم

ملاحظه أنه  $\triangle PQR \cong \triangle SRB$  و

"ضلع وترين مثلث قائم"

$\therefore BR = RQ = \frac{12 - 4}{2} = 4$  سم

مساحة شبة  $PQR = \frac{1}{2} \times BR \times PQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$  سم<sup>2</sup> و  $SR = 3$  سم

\* الطرف الأيسر =  $\frac{\text{مساحة شبة}}{\text{جانب + جانب}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 3}{\frac{12}{10} + \frac{9}{10}} = \frac{6}{\frac{21}{10}} = \frac{6 \times 10}{21} = \frac{40}{7} = 3$  الطرف الأيسر #

\* مساحة شبة المنحرف =  $\frac{1}{2} \times (\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}) \times \text{الارتفاع}$

$\therefore$  مساحة  $PBC = \frac{1}{2} \times (SP + BC) \times PQ = \frac{1}{2} \times (4 + 12) \times 3$

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 3 = 24$  سم<sup>2</sup> #

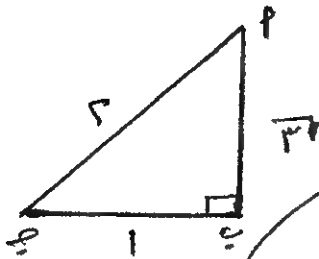
مثال ٩) P دى مثلث قائم من ب فإذا كان  $BP = 36$  و  $PC = 36$

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية B

الحل :-

$\therefore BP = PC = 36$  و  $BP = 36$  و  $PC = 36$  "مساحة الشبة"

\* يمكن افتراض أنه  $P = 37$   $P = 6$   $P = 2$  "لأننا نتعامل مع نسب"



$$\therefore \text{عدد ضلعين} = (B-P) - (G-P) = (P-B)$$

$$1 = 3 - 2 =$$

$$B-P = 1$$

$$\therefore \text{حاج} = \frac{37}{6} = \text{حاج} = \frac{1}{6} \text{ ح حاج} = 37$$

من ملاحظة: -- حيث أنه

جاء حجاج كما نسب وبالقالي لم

تضع ثابت لأنه سوف يحذف

عشر القسم

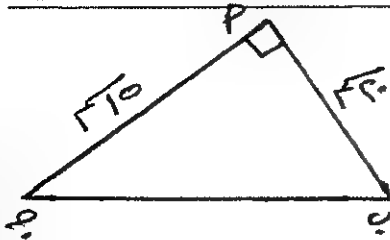
\* \* \* تدريب \* \* \*  
إذا كان  $P = 3$   $P = 5$   $P = 6$  قائم فرب  
أوجد النسب المثلثية للزاوية P

### تدريب على "النسب المثلثية للزاوية الحادة"

١. حول إلى درجات ودقائق وثواني كل من:
  - ٥ و ٣٢ °  $\angle$  ٧ و ٦٤ °  $\angle$  ١٢ و ١٠٨ °  $\angle$  ١١٣ و ١٥٨ °  $\angle$
٢. حول إلى درجات فقط كل مما يأتي:
  - ٣٠ °  $\angle$  ٤٢ °  $\angle$  ٥٦ °  $\angle$  ٨٠ °  $\angle$  ١٢٠ °  $\angle$  ١٧٠ °  $\angle$  ٢٤٠ °  $\angle$  ١١٢ °  $\angle$
٣. إذا كانت النسبة بين قياس زاويتي متتامتين ٥ : ٣ أوجد قياس كل من زاويتي التقدير الستين.
٤. إذا كانت النسبة بين قياسات زاويتين ٧ : ٤ : ٣ أوجد القياس الستين لكل زاوية من زواياها.
٥. P ب مثلث قائم الزاوية قرب P = 9 سم ، B ب = 12 سم ألقب متساوية كل من النسب الآتية: -- ح P ، ح P ، ح P ، ح P

[٧] من الشكل المقابل :-

أثبت أن جتا ج - جتا ب = جتا ج + جتا ب = صفر

[٨] من صيغ مثلث قائم في م ،  $\sin 5 = \cos 40 = \cos 50$ 

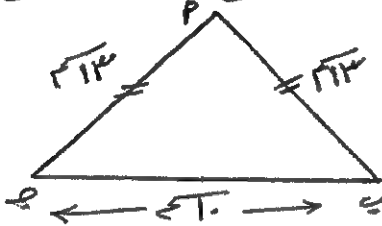
من ج = 13 أوجد قيمة :-

① ظا س + ظا ج ② جتا س جتا ج - طا س طا ج ③ جتا س جتا ج + جتا س طا ج

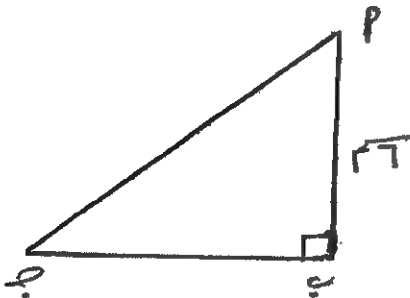
[٩] من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة :- ① جتا ب جتا ج + طا ب طا ج .

② جتا ب - طا ب + طا ج جتا ج .

[١٠] إذا كان  $P$  ج مثلث قائم في بوكان  $P 13 = P 10$  ج أثبت أن  $P$  جتا ج + جتا  $P$  جتا ج = 1

[١١] من الشكل المقابل :-

 $P$  ج مثلث قائم في ب $P 6 = P 3$  ، طا ج =  $\frac{3}{2}$ أوجد :- ① طول كل من  $P$  ج و  $P$  ج②  $P$  جتا ج + جتا  $P$  $P$  ج شبه مغرف فيه  $P$  ج  $AB$  ج ،  $\sin 6 = (\sin 3)^\circ$  ، $P 3 = P 6$  ،  $\sin 6 = \sin 3$  ،  $\cos 6 = \cos 3$ أثبت أن جتا (ج ج) - طا (>  $P$  ج) =  $\frac{1}{2}$ 

[١٢]

١٠) النسب المثلثية الأساسية لبعده الزاوي

\* سوف ندرس هذا العام النسب المثلثية الأساسية للزاوي ٣٠° ٦٠° ٩٠°  
والمجدول التالي يوضح ذلك :-

ملاحظة هامة جدًا	٩٠°	٦٠°	٣٠°	نسب الزاوية المثلثية
جا ٣٠° = جتا ٦٠°	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	جا
جتا ٣٠° = جا ٦٠°	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	جتا
أي أنه :- جا الزاوية = جتا المقمة جتا الزاوية = جا المقمة	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	ظا
	ملاحظة :- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$			

"أخف هذه  
الدوال  
جيداً"

مثال ① :- أوجد قيمة  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tan 30^\circ$  بدوياً الحاسبة  
الحل :-

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{3-1+1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

مثال ② :- أوجد قيمة  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ + \tan 60^\circ$   
٦٠° ظا ٦٠° - ٣٠° جا

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{(1) + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

مثال ۵ :- اُجبت اے  $7 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = (7 \cdot 6 + 1) \div 3 \cdot 6$  اکلے :-

①  $\leftarrow \frac{A}{3} = \frac{1}{3} - 1 = \left(\frac{1}{3V}\right) - \left(\frac{1}{3V}\right) = \frac{0}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} = \text{الطرف الآخر}$

$$^c \left( \frac{37}{c} \right) \div \left( \frac{1}{37} \times 37 + 1 \right) = 20 \div (20 + 1) = \frac{20}{21}$$

$$\textcircled{5} \leftarrow \boxed{\frac{\Delta}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma} \otimes \gamma = \frac{\gamma}{2} \ominus \gamma = \frac{\gamma}{2} \div (1+1) =$$

منه ① ② - ينتج أنه الطرفان متساويان # .

مثال ٤ :- اوجدي قيمة  $x$  التي تحقق  $a^x = 1$  :-

P. س ج ا ٣ ج ا ٤ = ج ا ٢ ج ا ٣ ج ا ٤ - ج ا ١ ج ا ٢ ج ا ٣ ج ا ٤

صیغے سے زاویہ مادہ

$$\gamma - \bar{\gamma}_p = \sum \bar{\gamma}_p \quad \gamma - \bar{\gamma}_p \quad \therefore \quad -P$$

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{\epsilon} \times \omega \Leftarrow \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right) = \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \times \frac{1}{c} \times \omega \therefore$$

$$\boxed{V=0} \xleftrightarrow{\sum X} \frac{\mu}{\sum} = \frac{1}{\sum} \times 0 \Leftarrow$$

$$1 \times c - (p \cdot v) = 0 - 105 \leftarrow \{ 0 - 105 - 7 \cdot 15 = 0 - 105 \therefore -0 \}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{c} = c - b \leftarrow \frac{c}{c} = c - b \iff 1 = c - b = c - b$$

• نتیجہ سے الزاویہ الہ جبکہ لیاوی  $\frac{1}{2}$   $\Leftarrow$  سن = ۲۰

① اَوْصِيَّةٌ مَا لَمْ يَلَاظْ - ظَالِمٌ - جَانِسٌ

\*\*\*  
تَرْيِبُ  
\*\*\*

⑤ اُردو سے عربی سے جہاں = ۲۰۰ = ۶۰۰

(۳) اوجہ سے قیمت ظا س =  $\frac{۰.۳۰۶۲}{۰.۳۰۶۲ - 1}$  6 سے مادہ



## \* استخدام آلة حاسبة في إيجاد الدوال المثلثية :-

### □ إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة :-

\* يمكن إيجاد قيمة ما يلي باستخدام الحاسبة كالآتي  $\rightarrow \sin(30) = \frac{1}{2}$

مثال ① :- باستخدام الحاسبة أوجد قيمة الأتي مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية :-  
 ① جاب  $72^\circ$  ② جاب  $65^\circ$  ③ جاب  $82^\circ$  ④ جاب  $45^\circ$  ⑤ جاب  $30^\circ$  ⑥ جاب  $15^\circ$  ⑦ جاب  $75^\circ$  ⑧ جاب  $90^\circ$  ⑨ جاب  $0^\circ$  ⑩ جاب  $180^\circ$

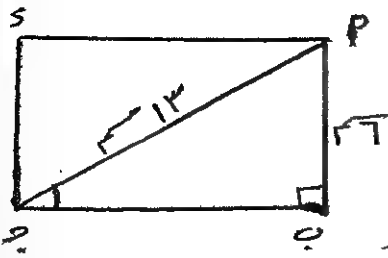
الحل :-  
 ① جاب  $72^\circ \approx 0.951$   
 ② جاب  $65^\circ \approx 0.423$   
 ③ جاب  $82^\circ \approx 0.990$   
 ④ جاب  $45^\circ \approx 0.707$   
 ⑤ جاب  $30^\circ \approx 0.5$   
 ⑥ جاب  $15^\circ \approx 0.259$   
 ⑦ جاب  $75^\circ \approx 0.966$   
 ⑧ جاب  $90^\circ \approx 1$   
 ⑨ جاب  $0^\circ \approx 0$   
 ⑩ جاب  $180^\circ \approx 0$

### □ إيجاد قياس زاوية إذا علمت إحدى نسب المثلثية

\* إذا كان  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  فانه يمكن إيجاد  $\theta$  (هـ) باستخدام الحاسبة كالآتي  
 $\rightarrow \sin^{-1}(\frac{3}{4}) = 47^\circ$

مثال ① :- أوجد  $\theta$  (د) من كل مما يأتي باستخدام الحاسبة :-  
 ①  $\sin \theta = 0.7$  ②  $\cos \theta = 0.8$  ③  $\tan \theta = 1.2$  ④  $\sin \theta = 0.5$  ⑤  $\cos \theta = 0.6$  ⑥  $\tan \theta = 0.9$  ⑦  $\sin \theta = 0.3$  ⑧  $\cos \theta = 0.4$  ⑨  $\tan \theta = 0.5$  ⑩  $\sin \theta = 0.1$

الحل :-  
 ① جاب  $0.7 = \sin \theta$  ② جاب  $0.8 = \cos \theta$  ③ جاب  $1.2 = \tan \theta$  ④ جاب  $0.5 = \sin \theta$  ⑤ جاب  $0.6 = \cos \theta$  ⑥ جاب  $0.9 = \tan \theta$  ⑦ جاب  $0.3 = \sin \theta$  ⑧ جاب  $0.4 = \cos \theta$  ⑨ جاب  $0.5 = \tan \theta$  ⑩ جاب  $0.1 = \sin \theta$



مثال ٥ :- من الشكل المقابل  $P$  هي مستطيل فيه :-

$PQ = 7$  سم ،  $QR = 13$  سم أو  $7$  :-

١)  $\angle P > \angle Q$

٢) مساحة المستطيل  $PQ$  هي لأقرب رقم عشري واحد

الحل :-

١)  $PQ$  هي مستطيل  $\therefore \angle P > \angle Q = 90^\circ$

في  $\triangle PQR$  القائم في  $Q$   $\Leftarrow \angle P > \angle Q = 90^\circ$   $\Leftarrow \frac{\text{المقابل}}{\text{الجوار}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{7}{13}$  باستخدام الحاسبة :-

$$\text{shift sin} \left( \frac{6}{13} \right) = 27^\circ 29' 11'' \approx 27.5^\circ$$

٢)  $\angle P > \angle Q$   $\Leftarrow \angle P > 90^\circ$   $\Leftarrow \angle P = 180^\circ - \angle Q = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$   $\Leftarrow \angle P = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\therefore$  مساحة المستطيل  $PQ$  هي = الطول  $\times$  العرض =  $PQ \times QR = 7 \times 13 = 91$  سم<sup>2</sup>

### تأريخ على النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

١) بدور استخدام الحاسبة أو جدول قيم :-

١) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	٢) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
٣) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	٤) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
٥) $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	٦) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
٧) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	٨) $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

٢) بدور استخدام الحاسبة أثبت أن :-

١) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	٢) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
٣) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	٤) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
٥) $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	٦) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
٧) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	٨) $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$



## الوحدة الخامسة : -

# الهندسة

(1) البعد بين نقطتين

(2) احداثيات منتصف قطعة مستقيمة

(3) ميل الخط المستقيم

معادله الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع  
من محور الصادات

## اختبار الوحدة

## الوحدة الخامسة

مكتبة وسام

شؤون شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات  
01004423597.3943035

### (١) الجبر بغير نقطتين

\* إذا كان  $P = (س, ص)$  ،  $Q = (س, ص)$  فإن :-

الجبر بغير النقطتين  $P, Q = \sqrt{(فرق الصادات) + (فرق الصادات)}$

ملاحظة :- المقياس

ليس ضروري أن

القيمة تنقسم إلى ١

$(س - س) = (ص - ص)$

أي أن الجبر بغير النقطتين  $P, Q = \sqrt{(س - س) + (ص - ص)}$

الجبر بغير النقطتين  $P, Q$  هو طول  $P, Q$

مثال ① :- أوجد طول  $P, Q$  من كل ما يأتي :-

①  $P(٤, ٥)$  ،  $Q(١, ٦)$  ②  $P(٢, ١)$  ،  $Q(١, ٠, ٧)$  ③  $P(١, ٠, ٦)$  ،  $Q(١, ٠, ٦)$

الحل :-

① طول  $P, Q = \sqrt{(١ - ٤) + (٥ - ٥)} = \sqrt{٩ + ٠} = \sqrt{٩} = ٣$  وحدة طول

② طول  $P, Q = \sqrt{(١ - ٢) + (٠ - ١)} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢} = ١, ٤١$  وحدة طول

③ طول  $P, Q = \sqrt{(١ - ١) + (٠ - ٠)} = \sqrt{٠ + ٠} = \sqrt{٠} = ٠$  وحدة طول

\* \* \* تدريب \* \* \*  
أوجد طول  $P, Q$  إذا كان  $P(٣, ٥)$  ،  $Q(٠, ٦)$

مثال ② :- أثبت أن المثلث الذي رؤوسه فقط

$P(٢, ١)$  ،  $Q(٢, ٤)$  ،  $R(٦, ١)$  متساوي الساقين

الحل :- نوجد الجبر بغير كل نقطتين أي طول  $P, Q$  ، طول  $P, R$  ، طول  $Q, R$  "أضلاع المثلث"

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(1-1) + (1-1)} = \sqrt{0+0} = 0 \text{ وحدة طول}$$

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(1-1) + (1-1)} = \sqrt{0+0} = 0 \text{ وحدة طول}$$

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(1-1) + (1-1)} = \sqrt{0+0} = 0 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore P \text{ بـ} = P \text{ بـ} \therefore P \text{ بـ} \text{ متساوي الساقين} \#$$

ملاحظة "البعد بين النقطة  $P(س, ص)$  ونقطة الأصل  $(0,0)$  هو: -

$$\sqrt{س^2 + ص^2}$$

مثال ٣ :- إذا كان  $P$  بـ محيطاً حيث  $P(0,0)$  بـ  $(3,4)$  بـ  $(-4,3)$  أوجد محيط  $\Delta P \text{ بـ}$

الحل :-

محيط  $\Delta P \text{ بـ} = P \text{ بـ} + P \text{ بـ} + P \text{ بـ}$  "مجموع أطوال أضلاعه"

$$P \text{ بـ} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta P \text{ بـ} = 5 + 5 + \sqrt{2} = 10 + \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

ملاحظة هامة "لا بُد أن أي ثلاثة نقط تقع على استقامة واحدة تقع على مستقيم واحد" فوجد البعد بين كل نقطتين ثم ثبت أنه أكبر بعداً من مجموع البعدين الآخرين.

مثال ٤ أثبت أنه فقط  $P(3,7)$  بـ  $(1,6)$  بـ  $(0,0)$  تقع على استقامة واحدة

$$P \text{ بـ} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$







$$\therefore \text{مساحة المعبر} = \frac{1}{2} \times P \times 5 = \frac{1}{2} \times 276 \times 5 = 690 \text{ وحدة مربعة}$$

أثبت أن النقطة P (3-6) ب (0-6) ج (7-6) د (9-6) هـ دوس متوازي أخلاخ وقطعه بياخيا على الشبلة القريبية.

مثال ⑤ إذا كان P ب ج د مربع وكان P (2-6) ج (3-6) أوجد مساحة سطح المربع.

الحل :-

$$\therefore \text{مساحة المربع} = \frac{1}{2} (\text{قطره})$$

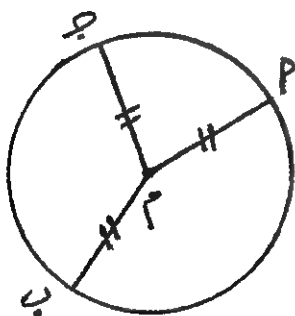
$$\therefore \text{مساحة المربع} = \frac{1}{2} (P + ج)$$

$$P + ج = (3-2) + (9+0) = 10 \quad \therefore 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{مساحة المربع} = \frac{1}{2} \times (10 \times 10) = 50 \text{ وحدة مربعة}$$

هـ "ملحوظة هامة" لاثبات أن النقطة P ب ج د هـ تقع على دائرة واحدة مركزها (م) نثبت أن  $Pم = بم = جم = دم$  "أنصاف أقطار"

\* من الشكل المقابل :-



طول نصف قطر الدائرة (نصفه)  $Pم = بم = جم = دم$

• محيط الدائرة =  $2 \times$  نصفه  $\therefore$  مساحة الدائرة =  $\frac{1}{2}$  نصفه

أثبت أن النقطة P (7-6) ب (2-6) ج (8-6) د (8-6) هـ تقع على الدائرة التي مركزها م حيث  $م (6-6)$  وأوجد مساحتها حيث  $(12 \times 3)$

"فكرة حل القريب" نوجد P م ب ج د هـ ونثبت أنهما متساويان من القول

مثال ٨ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (١٦، ١) يساوي ٥٧٢  
أوجد قيمة س .

الحل :-

$$\begin{aligned} & \text{المعبر به النقطة (س، ٥) (١٦، ١) يساوي ٥٧٢} \\ & \therefore ٥٧٢ = \sqrt{(١-٥)^2 + (١٦-٥)^2} \quad \text{بتربيع الطرفين} \\ & \Leftrightarrow ٥٨٤ = (١-٥)^2 + (١٦-٥)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow ٥٨٤ = ١٦ + ٣٦ + ٥ - ١٠س - ١٠س + ٥٠ \\ & \Leftrightarrow ٥٨٤ = ٣٢ + ٥ - ١٠س - ١٠س + ٥٠ \quad \text{بالتبسيط} \\ & \Leftrightarrow ٥٨٤ = ٣٧ - ٢٠س \quad \text{أو } ٥٨٤ = ٣٧ - ٢٠س \\ & \quad \quad \quad ٨ = س \quad \quad \quad ٤ = س \end{aligned}$$

:- قيمة س = ٨ و ٤

### تأدير على "المعبر به نقطتين"

III اكل ما يأتي :-

- ١) المعبر به النقطة (١٦، ١) يساوي .....
- ٢) المعبر به النقطة (٤٦، ٣) ونقطة الأهل يساوي .....
- ٣) إذا كان P (٣-٤٢) ب (١٦-١) فإيه P = .....
- ٤) إذا كان المعبر به النقطة (١٦، ١) هو وحدة طول واحدة فإيه P = .....
- ٥) طول قطر الدائرة التي مركزها (٤٦، ٧) وقمر بالنقطة (١٦، ٣) يساوي .....
- ٦) بعد النقطة (٣-٤-٥) عن محور السينات = ..... وحدة طول

IV أختار الاجابة الصحيحة :-

- ١) دائرة مركزها نقطة الأهل وطول نصف قطرها ٢ وهدر طول فإيه عن النقطة  
الآتية تنتمي الى الدائرة [ (١٦، ١) (١٤، ٣) (١٤، ٣) (١٦، ٣) ]

- ١٤ أثبت أنه النقطة الأتية تقع على استقامة واحدة :-
- ١٥  $P(16, 2)$  ،  $B(2, 63)$  ،  $C(41, 1)$  ،  $D(36, 7)$  ،  $E(16, 1)$  ،  $F(-6, -4)$
- ١٦ أثبت أنه المثلث الذي رؤوسه النقطة  $P(5, 6)$  ،  $B(7, 1)$  ،  $C(10, 5)$  قائم الزاوية من  $B$  ثم أجب مسألته .
- ١٧ إذا كانت  $P(-1, 6)$  ،  $B(3, 2)$  ،  $C(6, 0)$  أثبت أنه  $PA \perp BC$  قائم الزاوية من  $B$  وأجب مسألته .
- ١٨ بيهر نوع المثلث  $ABC$  بالفيه لزوايا  $A$  حيث  $P(1, 6)$  ،  $B(16, 1)$  ،  $C(2, -6)$
- ١٩ أثبت أنه النقطة  $P(4, 4)$  ،  $B(5, 3)$  ،  $C(7, 16)$  ،  $D(8, 0)$  ،  $E(0, 8)$  رؤوس متوازي أضلاع .
- ٢٠ أثبت أنه النقطة  $P(10, 1)$  ،  $B(6, 5)$  ،  $C(1, 8)$  ،  $D(3, 2)$  رؤوس مستطيل ثم أجب طول قطره ومسألته .
- ٢١ أثبت أنه النقطة  $P(3, 3)$  ،  $B(3, 6)$  ،  $C(6, 0)$  ،  $D(0, 6)$  رؤوس مربع ثم أجب طول قطره ومسألته .
- ٢٢ أثبت أنه النقطة  $P(2, 1)$  ،  $B(4, 6)$  ،  $C(6, 2)$  تقع على دائرة واحدة مركزها  $M(-2, 1)$  ثم أجب محيط الدائرة حيث  $(\pi = 3.14)$  .
- ٢٣ إذا كان المربعين النقطتين  $P(0, 6)$  ،  $B(6, 0)$  ،  $C(0, 6)$  ،  $D(6, 0)$  رؤوس دائرة طول أوجده قيمة له .
- ٢٤ إذا كان المربعين النقطتين  $P(7, 1)$  ،  $B(3, 6)$  ،  $C(6, 3)$  ،  $D(3, 0)$  رؤوس دائرة طول أوجده قيمة  $P$  .
- ٢٥ إذا كان  $P(5, 3)$  ،  $B(3, 2)$  ،  $C(5, 1)$  وكان  $P = B = C$  أوجده قيمة  $S$  .

"أحداث منصف نقطة مستقيمة"

\* إذا كان  $P(س, س)$  و  $ب(س, س)$  فانه :-

$$\boxed{\text{أحداث منتصف } P\text{-}ب = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right) = \left( \frac{س+س}{2}, \frac{س+س}{2} \right)}$$

مثال ① :- إذا كان  $P(٥, ٢) = ب(١, ٤)$  أوجد أحداث منتصف  $P\text{-}ب$   
الحل :-

$$\text{أحداث نقطة المنتصف} = \left( \frac{٤+١}{2}, \frac{٢+٥}{2} \right) = (٢, ٣)$$

مثال ② :- إذا كان  $ب(١٠, ٤)$  و  $أ(٤, ٤)$  نقطة منتصف  $P\text{-}ب$  حيث  $P(٤, ٢)$   
أوجد أحداث نقطة  $ب$   
الحل :-

بفرصة  $أ$  و  $ب = (س, س)$  :- أحداث منتصف  $P\text{-}ب$

$$\therefore (٤, ١٠) = \left( \frac{س+٤}{2}, \frac{س+٤}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{س+٤}{2} = ١٠ \quad \frac{س+٤}{2} = ٤ \quad \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{-} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ٤+٤=٨ \\ ٤-٤=٠ \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{-} \end{array} \quad \begin{array}{l} ٤+٤=٨ \\ ٤-٤=٠ \end{array}$$

$$\therefore \text{أحداث نقطة } ب = (١٦, ٦)$$

مثال ③ :- إذا كان  $P(٣, ٥)$  منتصف القطعة  $P\text{-}ب$  حيث  $ب(٥, ٥)$   
أوجد قيمة  $س$  حيث  $ب(٤, ٥)$   
الحل :-

$$\therefore P \text{ منتصف } P\text{-}ب = (٣, ٥) \Leftarrow \left( \frac{س+٥}{2}, \frac{٤+٥}{2} \right)$$

$$\boxed{١٠ = س} \Leftarrow \frac{٤+٥}{2} = ٦ \Leftarrow \frac{٤-٥}{2} = ٣ \Leftarrow$$



مكتبة وسام

ش.م.م. شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بسات

01004423597\_3943035

:- القطر انه ينصف كل منها الآخر

:- الشكل P ب ج د متوازي أضلاع .

مثال ① :- أثبت أنه الشكل P ب ج د مستطيل حيث P (-3, 6) ب (-1, 6) د (-1, 0) س (0, 0)

الحل :-

\* لنثبت أنه الشكل مستطيل  
نثبت أولاً أنه متوازي أضلاع  
ثم نثبت أنه لقطرانه متساويان  
من القول

نقطة منتصف P ج =  $\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$  ①  
نقطة منتصف ب د =  $\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$  ②

منه ① ② الشكل P ب ج د متوازي أضلاع .

P ج =  $\sqrt{(-1-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$  وحدة طول .  
ب د =  $\sqrt{(-1-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$  وحدة طول .

∴ P ج = ب د " لقطرانه متساويان " ∴ الشكل P ب ج د مستطيل #

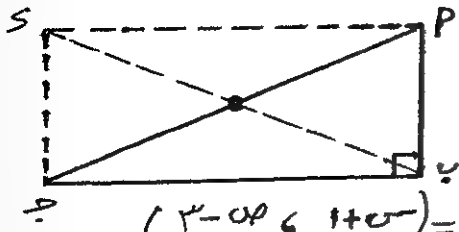
إذا كان P (6, 0) ب (7, 1) د (6, 9) س (0, 13) \*  
أثبت أنه الشكل P ب ج د متوازي أضلاع . \*  
\* \* \*

مثال ② :- أثبت أنه النقط P (0, 1) ب (3, 6) د (3, 0) س (0, 0)  
هو دوس مثلث قائم الزاوية من ب ، ثم أوجد إحداثي نقطة س  
التي تجعل الشكل P ب ج د مستطيل .

الحل :-

① P ب =  $\sqrt{(3-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$  وحدة طول  $\Leftarrow$  (ب) = 3 وحدة مربعة .  
② ب ج =  $\sqrt{(3-3)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{0+36} = \sqrt{36} = 6$  وحدة طول  $\Leftarrow$  (ب ج) = 36 وحدة مربعة .  
③ P د =  $\sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$  وحدة طول  $\Leftarrow$  (د) = 10 وحدة مربعة .

منه ① ② ③ يتبع أنه (P ج) = (ب د) + (ب ج) ∴ P ب ج د قائم من ب #



نقطة  $A$  هي  $S = (3, 0)$  حيث يكون النقط مستطيل

$\therefore P$  و  $B$  و  $S$  ينصف كل منها الآخر

$\therefore$  نقطة منتصف  $SP$  = نقطة منتصف  $BQ$

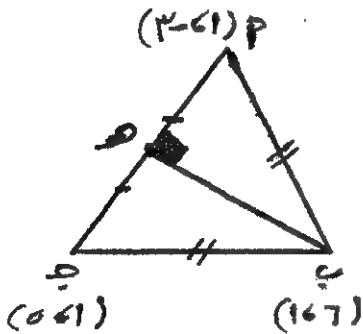
$$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1.5, 0) \iff \left(\frac{3+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0-0}{2}\right)$$

$$1.5 = 0 \iff 0 = 1 + 0 \iff \frac{1+0}{2} = 0 \iff$$

$$1.5 = 0 \iff 3 - 0 = 2 \iff \frac{3-0}{2} = 1.5 \iff$$

$\therefore$  الإحداثي  $S = (-1, 6)$  #

الحال أ  $\therefore$  أجبته  $A$  هي  $P$  و  $D$  و  $S$  متساوي الساقين حيث  $P(3, 1)$   
 $B(1, 6)$  و  $C(0, 1)$  وأوجد الإحداثي نقطة منتصف  $SP$   
 ثم أوجد مسافة  $PD$  و  $P$  و  $B$ .



الحل:  $\therefore$

$$① \quad PB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$② \quad BC = \sqrt{(1-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$③ \quad PC = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$$

من ① و ②  $\therefore PB = BC$   $\therefore$   $P$  و  $D$  و  $S$  متساوي الساقين #

$$\therefore$$
 نقطة منتصف  $SP$  و  $B$   $\iff$   $(1.5, 0) = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1.5, 1)$

$\therefore$   $P = B$  و  $C$   $\therefore$  نقطة منتصف  $PC$  و  $B$   $\therefore$   $B \perp PC$  « نظرية »

$$B = C = \sqrt{(1-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$\therefore$  مسافة  $PD$  و  $P$  و  $B$   $= \frac{1}{2} \times PB \times \frac{1}{2} = 0 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$  و مسافة  $PD$  #

تمارين على "إحداثي منتصف قطعة مستقيمة"

1) أوجد إحداثي نقطة منتصف  $P$  من كل من الحالات الآتية :-

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} P(462) \text{ و } B(067) \quad \textcircled{2} P(7-67) \text{ و } B(-061) \\ \textcircled{3} P(364) \text{ و } B(762) \quad \textcircled{4} P(2-64) \text{ و } B(-0-60) \end{array}$$

2) إذا كانت  $B$  منتصف  $P$  فأوجد  $B$  من كل من الحالات الآتية :-

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} P(561) \text{ و } B(762) \text{ و } A(6-60) \quad \textcircled{2} P(3-63) \text{ و } B(1169) \text{ و } A(2-65) \\ \textcircled{3} P(7-65) \text{ و } B(11-69) \text{ و } A(3-63) \quad \textcircled{4} P(7-65) \text{ و } B(762) \text{ و } A(664) \end{array}$$

3) إذا كان  $P(067)$  و  $B(4-64)$  و  $A(264)$  أثبت أن  $A$  وسط  $BP$  فثبت قائم

الزاوية من  $B$  لم  $A$  و  $B$  إحداثي نقطة  $A$  التي تجعل الشكل  $P$   $B$   $A$   $C$  متطابق.

4) إذا كان  $P(7-61)$  و  $B(269)$  أوجد إحداثيات النقطة التي تقسم  $P$  إلى أربعة أجزاء متساوية من الطول.

5) أثبت أنه  $P$  و  $D$   $B$  متساويين  $P(063)$  و  $B(463)$  و  $A(7-61)$  ثم

أوجد طول القطر المرسوم من  $P$  ونحو  $B$  على  $AD$  وأوجد مساحة  $P$  و  $D$   $B$   $A$ .

6) إذا كان  $P(462)$  و  $B(3-65)$  و  $A(067)$  أثبت أنه  $P$  و  $B$   $A$   $C$  متوازي أضلاع.

7)  $P$  و  $B$   $A$   $C$  متوازي أضلاع فيه  $P(463)$  و  $B(1-64)$  و  $A(3-64)$  أوجد

إحداثي  $C$  ، فذه  $P$  و  $C$  حيث  $P$   $C$   $A$   $B$   $C$   $D$  ما  $A$   $B$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$   $M$   $N$   $O$   $P$   $Q$   $R$   $S$   $T$   $U$   $V$   $W$   $X$   $Y$   $Z$   $AA$   $AB$   $AC$   $AD$   $AE$   $AF$   $AG$   $AH$   $AI$   $AJ$   $AK$   $AL$   $AM$   $AN$   $AO$   $AP$   $AQ$   $AR$   $AS$   $AT$   $AU$   $AV$   $AW$   $AX$   $AY$   $AZ$   $BA$   $BB$   $BC$   $BD$   $BE$   $BF$   $BG$   $BH$   $BI$   $BJ$   $BK$   $BL$   $BM$   $BN$   $BO$   $BP$   $BQ$   $BR$   $BS$   $BT$   $BU$   $BV$   $BW$   $BX$   $BY$   $BZ$   $CA$   $CB$   $CC$   $CD$   $CE$   $CF$   $CG$   $CH$   $CI$   $CJ$   $CK$   $CL$   $CM$   $CN$   $CO$   $CP$   $CQ$   $CR$   $CS$   $CT$   $CU$   $CV$   $CW$   $CX$   $CY$   $CZ$   $DA$   $DB$   $DC$   $DD$   $DE$   $DF$   $DG$   $DH$   $DI$   $DJ$   $DK$   $DL$   $DM$   $DN$   $DO$   $DP$   $DQ$   $DR$   $DS$   $DT$   $DU$   $DV$   $DW$   $DX$   $DY$   $DZ$   $EA$   $EB$   $EC$   $ED$   $EE$   $EF$   $EG$   $EH$   $EI$   $EJ$   $EK$   $EL$   $EM$   $EN$   $EO$   $EP$   $EQ$   $ER$   $ES$   $ET$   $EU$   $EV$   $EW$   $EX$   $EY$   $EZ$   $FA$   $FB$   $FC$   $FD$   $FE$   $FF$   $FG$   $FH$   $FI$   $FJ$   $FK$   $FL$   $FM$   $FN$   $FO$   $FP$   $FQ$   $FR$   $FS$   $FT$   $FU$   $FV$   $FW$   $FX$   $FY$   $FZ$   $GA$   $GB$   $GC$   $GD$   $GE$   $GF$   $GG$   $GH$   $GI$   $GJ$   $GK$   $GL$   $GM$   $GN$   $GO$   $GP$   $GQ$   $GR$   $GS$   $GT$   $GU$   $GV$   $GW$   $GX$   $GY$   $GZ$   $HA$   $HB$   $HC$   $HD$   $HE$   $HF$   $HG$   $HH$   $HI$   $HJ$   $HK$   $HL$   $HM$   $HN$   $HO$   $HP$   $HQ$   $HR$   $HS$   $HT$   $HU$   $HV$   $HW$   $HX$   $HY$   $HZ$   $IA$   $IB$   $IC$   $ID$   $IE$   $IF$   $IG$   $IH$   $II$   $IJ$   $IK$   $IL$   $IM$   $IN$   $IO$   $IP$   $IQ$   $IR$   $IS$   $IT$   $IU$   $IV$   $IW$   $IX$   $IY$   $IZ$   $JA$   $JB$   $JC$   $JD$   $JE$   $JF$   $JG$   $JH$   $JI$   $IJ$   $JK$   $IL$   $IM$   $IN$   $IO$   $IP$   $IQ$   $IR$   $IS$   $IT$   $IU$   $IV$   $IW$   $IX$   $IY$   $IZ$   $KA$   $KB$   $KC$   $KD$   $KE$   $KF$   $KG$   $KH$   $KI$   $KJ$   $KL$   $KM$   $KN$   $KO$   $KP$   $KQ$   $KR$   $KS$   $KT$   $KU$   $KV$   $KW$   $KX$   $KY$   $KZ$   $LA$   $LB$   $LC$   $LD$   $LE$   $LF$   $LG$   $LH$   $LI$   $LJ$   $LK$   $LL$   $LM$   $LN$   $LO$   $LP$   $LQ$   $LR$   $LS$   $LT$   $LU$   $LV$   $LW$   $LX$   $LY$   $LZ$   $MA$   $MB$   $MC$   $MD$   $ME$   $MF$   $MG$   $MH$   $MI$   $MJ$   $MK$   $ML$   $MM$   $MN$   $MO$   $MP$   $MQ$   $MR$   $MS$   $MT$   $MU$   $MV$   $MW$   $MX$   $MY$   $MZ$   $NA$   $NB$   $NC$   $ND$   $NE$   $NF$   $NG$   $NH$   $NI$   $NJ$   $NK$   $NL$   $NM$   $NN$   $NO$   $NP$   $NQ$   $NR$   $NS$   $NT$   $NU$   $NV$   $NW$   $NX$   $NY$   $NZ$   $OA$   $OB$   $OC$   $OD$   $OE$   $OF$   $OG$   $OH$   $OI$   $OJ$   $OK$   $OL$   $OM$   $ON$   $OO$   $OP$   $OQ$   $OR$   $OS$   $OT$   $OU$   $OV$   $OW$   $OX$   $OY$   $OZ$   $PA$   $PB$   $PC$   $PD$   $PE$   $PF$   $PG$   $PH$   $PI$   $PJ$   $PK$   $PL$   $PM$   $PN$   $PO$   $PP$   $PQ$   $PR$   $PS$   $PT$   $PU$   $PV$   $PW$   $PX$   $PY$   $PZ$   $QA$   $QB$   $QC$   $QD$   $QE$   $QF$   $QG$   $QH$   $QI$   $QJ$   $QK$   $QL$   $QM$   $QN$   $QO$   $QP$   $QQ$   $QR$   $QS$   $QT$   $QU$   $QV$   $QW$   $QX$   $QY$   $QZ$   $RA$   $RB$   $RC$   $RD$   $RE$   $RF$   $RG$   $RH$   $RI$   $RJ$   $RK$   $RL$   $RM$   $RN$   $RO$   $RP$   $RQ$   $RR$   $RS$   $RT$   $RU$   $RV$   $RW$   $RX$   $RY$   $RZ$   $SA$   $SB$   $SC$   $SD$   $SE$   $SF$   $SG$   $SH$   $SI$   $SJ$   $SK$   $SL$   $SM$   $SN$   $SO$   $SP$   $SQ$   $SR$   $SS$   $ST$   $SU$   $SV$   $SW$   $SX$   $SY$   $SZ$   $TA$   $TB$   $TC$   $TD$   $TE$   $TF$   $TG$   $TH$   $TI$   $TJ$   $TK$   $TL$   $TM$   $TN$   $TO$   $TP$   $TQ$   $TR$   $TS$   $TT$   $TU$   $TV$   $TW$   $TX$   $TY$   $TZ$   $UA$   $UB$   $UC$   $UD$   $UE$   $UF$   $UG$   $UH$   $UI$   $UJ$   $UK$   $UL$   $UM$   $UN$   $UO$   $UP$   $UQ$   $UR$   $US$   $UT$   $UU$   $UV$   $UW$   $UX$   $UY$   $UZ$   $VA$   $VB$   $VC$   $VD$   $VE$   $VF$   $VG$   $VH$   $VI$   $VJ$   $VK$   $VL$   $VM$   $VN$   $VO$   $VP$   $VQ$   $VR$   $VS$   $VT$   $VU$   $VV$   $VW$   $VX$   $VY$   $VZ$   $WA$   $WB$   $WC$   $WD$   $WE$   $WF$   $WG$   $WH$   $WI$   $WJ$   $WK$   $WL$   $WM$   $WN$   $WO$   $WP$   $WQ$   $WR$   $WS$   $WT$   $WU$   $WV$   $WW$   $WX$   $WY$   $WZ$   $XA$   $XB$   $XC$   $XD$   $XE$   $XF$   $YG$   $YH$   $YI$   $YJ$   $YK$   $YL$   $YM$   $YN$   $YO$   $YP$   $YQ$   $YR$   $YS$   $YT$   $YU$   $YV$   $YW$   $YX$   $YY$   $YZ$   $ZA$   $ZB$   $ZC$   $ZD$   $ZE$   $ZF$   $ZG$   $ZH$   $ZI$   $ZJ$   $ZK$   $ZL$   $ZM$   $ZN$   $ZO$   $ZP$   $ZQ$   $ZR$   $ZS$   $ZT$   $ZU$   $ZV$   $ZW$   $ZX$   $ZY$   $ZZ$

8) اختر الإجابة الصحيحة :-

1) إذا كان  $P(7-67)$  و  $B(061)$  فأوجد منتصف  $P$   $B$   $A$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$   $M$   $N$   $O$   $P$   $Q$   $R$   $S$   $T$   $U$   $V$   $W$   $X$   $Y$   $Z$   $AA$   $AB$   $AC$   $AD$   $AE$   $AF$   $AG$   $AH$   $AI$   $AJ$   $AK$   $AL$   $AM$   $AN$   $AO$   $AP$   $AQ$   $AR$   $AS$   $AT$   $AU$   $AV$   $AW$   $AX$   $AY$   $AZ$   $BA$   $BB$   $BC$   $BD$   $BE$   $BF$   $BG$   $BH$   $BI$   $IJ$   $JK$   $KL$   $LM$   $LN$   $LO$   $LP$   $LQ$   $LR$   $LS$   $LT$   $LU$   $LV$   $LW$   $LX$   $LY$   $LZ$   $MA$   $MB$   $MC$   $MD$   $ME$   $MF$   $MG$   $MH$   $MI$   $MJ$   $MK$   $ML$   $MM$   $MN$   $MO$   $MP$   $MQ$   $MR$   $MS$   $MT$   $MU$   $MV$   $MW$   $MX$   $MY$   $MZ$   $NA$   $NB$   $NC$   $ND$   $NE$   $NF$   $NG$   $NH$   $NI$   $NJ$   $NK$   $NL$   $NM$   $NN$   $NO$   $NP$   $NQ$   $NR$   $NS$   $NT$   $NU$   $NV$   $NW$   $NX$   $NY$   $NZ$   $OA$   $OB$   $OC$   $OD$   $OE$   $OF$   $OG$   $OH$   $OI$   $OJ$   $OK$   $OL$   $OM$   $ON$   $OO$   $OP$   $OQ$   $OR$   $OS$   $OT$   $OU$   $OV$   $OW$   $OX$   $OY$   $OZ$   $PA$   $PB$   $PC$   $PD$   $PE$   $PF$   $PG$   $PH$   $PI$   $PJ$   $PK$   $PL$   $PM$   $PN$   $PO$   $PP$   $PQ$   $PR$   $PS$   $PT$   $PU$   $PV$   $PW$   $PX$   $PY$   $PZ$   $QA$   $QB$   $QC$   $QD$   $QE$   $QF$   $QG$   $QH$   $QI$   $QJ$   $QK$   $QL$   $QM$   $QN$   $QO$   $QP$   $QQ$   $QR$   $QS$   $QT$   $QU$   $QV$   $QW$   $QX$   $QY$   $QZ$   $RA$   $RB$   $RC$   $RD$   $RE$   $RF$   $RG$   $RH$   $RI$   $RJ$   $RK$   $RL$   $RM$   $RN$   $RO$   $RP$   $RQ$   $RR$   $RS$   $RT$   $RU$   $RV$   $RW$   $RX$   $RY$   $RZ$   $SA$   $SB$   $SC$   $SD$   $SE$   $SF$   $SG$   $SH$   $SI$   $SJ$   $SK$   $SL$   $SM$   $SN$   $SO$   $SP$   $SQ$   $SR$   $SS$   $ST$   $SU$   $SV$   $SW$   $SX$   $SY$   $SZ$   $TA$   $TB$   $TC$   $TD$   $TE$   $TF$   $TG$   $TH$   $TI$   $TJ$   $TK$   $TL$   $TM$   $TN$   $TO$   $TP$   $TQ$   $TR$   $TS$   $TT$   $TU$   $TV$   $TW$   $TX$   $TY$   $TZ$   $UA$   $UB$   $UC$   $UD$   $UE$   $UF$   $UG$   $UH$   $UI$   $UJ$   $UK$   $UL$   $UM$   $UN$   $UO$   $UP$   $UQ$   $UR$   $US$   $UT$   $UU$   $UV$   $UW$   $UX$   $UY$   $UZ$   $VA$   $VB$   $VC$   $VD$   $VE$   $VF$   $VG$   $VH$   $VI$   $VJ$   $VK$   $VL$   $VM$   $VN$   $VO$   $VP$   $VQ$   $VR$   $VS$   $VT$   $VU$   $VV$   $VW$   $VX$   $VY$   $VZ$   $WA$   $WB$   $WC$   $WD$   $WE$   $WF$   $WG$   $WH$   $WI$   $WJ$   $WK$   $WL$   $WM$   $WN$   $WO$   $WP$   $WQ$   $WR$   $WS$   $WT$   $WU$   $WV$   $WW$   $WX$   $WY$   $WZ$   $XA$   $XB$   $XC$   $XD$   $XE$   $XF$   $YG$   $YH$   $YI$   $YJ$   $YK$   $YL$   $YM$   $YN$   $YO$   $YP$   $YQ$   $YR$   $YS$   $YT$   $YU$   $YV$   $YW$   $YX$   $YY$   $YZ$   $ZA$   $ZB$   $ZC$   $ZD$   $ZE$   $ZF$   $ZG$   $ZH$   $ZI$   $ZJ$   $ZK$   $ZL$   $ZM$   $ZN$   $ZO$   $ZP$   $ZQ$   $ZR$   $ZS$   $ZT$   $ZU$   $ZV$   $ZW$   $ZX$   $ZY$   $ZZ$

2) إذا كان  $P(160)$  و  $B(063)$  فأوجد  $P$   $B$   $A$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$   $M$   $N$   $O$   $P$   $Q$   $R$   $S$   $T$   $U$   $V$   $W$   $X$   $Y$   $Z$   $AA$   $AB$   $AC$   $AD$   $AE$   $AF$   $AG$   $AH$   $AI$   $AJ$   $AK$   $AL$   $AM$   $AN$   $AO$   $AP$   $AQ$   $AR$   $AS$   $AT$   $AU$   $AV$   $AW$   $AX$   $AY$   $AZ$   $BA$   $BB$   $BC$   $BD$   $BE$   $BF$   $BG$   $BH$   $BI$   $IJ$   $JK$   $KL$   $LM$   $LN$   $LO$   $LP$   $LQ$   $LR$   $LS$   $LT$   $LU$   $LV$   $LW$   $LX$   $LY$   $LZ$   $MA$   $MB$   $MC$   $MD$   $ME$   $MF$   $MG$   $MH$   $MI$   $MJ$   $MK$   $ML$   $MM$   $MN$   $MO$   $MP$   $MQ$   $MR$   $MS$   $MT$   $MU$   $MV$   $MW$   $MX$   $MY$   $MZ$   $NA$   $NB$   $NC$   $ND$   $NE$   $NF$   $NG$   $NH$   $NI$   $NJ$   $NK$   $NL$   $NM$   $NN$   $NO$   $NP$   $NQ$   $NR$   $NS$   $NT$   $NU$   $NV$   $NW$   $NX$   $NY$   $NZ$   $OA$   $OB$   $OC$   $OD$   $OE$   $OF$   $OG$   $OH$   $OI$   $OJ$   $OK$   $OL$   $OM$   $ON$   $OO$   $OP$   $OQ$   $OR$   $OS$   $OT$   $OU$   $OV$   $OW$   $OX$   $OY$   $OZ$   $PA$   $PB$   $PC$   $PD$   $PE$   $PF$   $PG$   $PH$   $PI$   $PJ$   $PK$   $PL$   $PM$   $PN$   $PO$   $PP$   $PQ$   $PR$   $PS$   $PT$   $PU$   $PV$   $PW$   $PX$   $PY$   $PZ$   $QA$   $QB$   $QC$   $QD$   $QE$   $QF$   $QG$   $QH$   $QI$   $QJ$   $QK$   $QL$   $QM$   $QN$   $QO$   $QP$   $QQ$   $QR$   $QS$   $QT$   $QU$   $QV$   $QW$   $QX$   $QY$   $QZ$   $RA$   $RB$   $RC$   $RD$   $RE$   $RF$   $RG$   $RH$   $RI$   $RJ$   $RK$   $RL$   $RM$   $RN$   $RO$   $RP$   $RQ$   $RR$   $RS$   $RT$   $RU$   $RV$   $RW$   $RX$   $RY$   $RZ$   $SA$   $SB$   $SC$   $SD$   $SE$   $SF$   $SG$   $SH$   $SI$   $SJ$   $SK$   $SL$   $SM$   $SN$   $SO$   $SP$   $SQ$   $SR$   $SS$   $ST$   $SU$   $SV$   $SW$   $SX$   $SY$   $SZ$   $TA$   $TB$   $TC$   $TD$   $TE$   $TF$   $TG$   $TH$   $TI$   $TJ$   $TK$   $TL$   $TM$   $TN$   $TO$   $TP$   $TQ$   $TR$   $TS$   $TT$   $TU$   $TV$   $TW$   $TX$   $TY$   $TZ$   $UA$   $UB$   $UC$   $UD$   $UE$   $UF$   $UG$   $UH$   $UI$   $UJ$   $UK$   $UL$   $UM$   $UN$   $UO$   $UP$   $UQ$   $UR$   $US$   $UT$   $UU$   $UV$   $UW$   $UX$   $UY$   $UZ$   $VA$   $VB$   $VC$   $VD$   $VE$   $VF$   $VG$   $VH$   $VI$   $VJ$   $VK$   $VL$   $VM$   $VN$   $VO$   $VP$   $VQ$   $VR$   $VS$   $VT$   $VU$   $VV$   $VW$   $VX$   $VY$   $VZ$   $WA$   $WB$   $WC$   $WD$   $WE$   $WF$   $WG$   $WH$   $WI$   $WJ$   $WK$   $WL$   $WM$   $WN$   $WO$   $WP$   $WQ$   $WR$   $WS$   $WT$   $WU$   $WV$   $WW$   $WX$   $WY$   $WZ$   $XA$   $XB$   $XC$   $XD$   $XE$   $XF$   $YG$   $YH$   $YI$   $YJ$   $YK$   $YL$   $YM$   $YN$   $YO$   $YP$   $YQ$   $YR$   $YS$   $YT$   $YU$   $YV$   $YW$   $YX$   $YY$   $YZ$   $ZA$   $ZB$   $ZC$   $ZD$   $ZE$   $ZF$   $ZG$   $ZH$   $ZI$   $ZJ$   $ZK$   $ZL$   $ZM$   $ZN$   $ZO$   $ZP$   $ZQ$   $ZR$   $ZS$   $ZT$   $ZU$   $ZV$   $ZW$   $ZX$   $ZY$   $ZZ$

9) امل ما يأتي :-

1) إذا كانت نقطة الأصل  $P$  منتصف  $P$   $B$   $A$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$   $M$   $N$   $O$   $P$   $Q$   $R$   $S$   $T$   $U$   $V$   $W$



### (٣) "ميل الخط المستقيم"

\* ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١، ٢) و (٣، ٤) هو :-

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{4-2}{3-1} = 1 \quad \text{حيث } x_1 \neq x_2$$

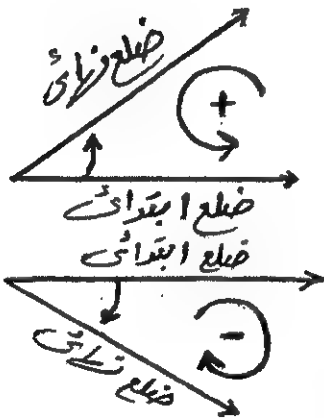
مثال ① ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين P (٢، ٤) و B (٦، ٥) هو :-

P (٢، ٤)  
B (٦، ٥)

$$\text{الميل} = \frac{5-4}{6-2} = \frac{1}{4}$$

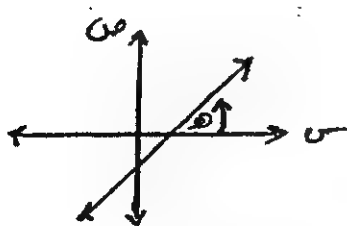
ملحوظة :- ① ميل أى مستقيم أفقى "يوازى محور السينات" = ٠  
② ميل أى مستقيم رأسى "يوازى محور الصادات" غير معرف .

\* تعريف قياس الزاوية :- هو مدى انفرج الضلع الزائى "المحرك"  
عند الضلع الابتدائى "الثابت"



\* يكون قياس الزاوية موجباً إذا تحرك الضلع الزائى  
عند عقارب الساعة

\* يكون قياس الزاوية سالباً إذا تحرك الضلع الزائى  
عند عقارب الساعة

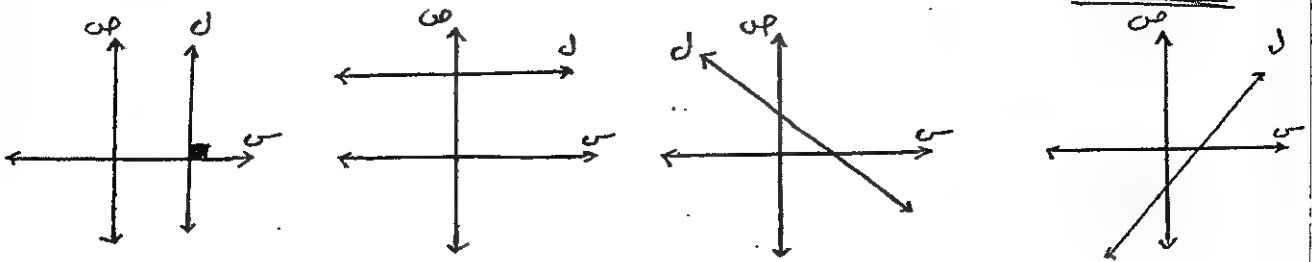


"تعريف" :- ميل المستقيم :- هو ظل الزاوية التى يصنعها  
المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\text{أي أنه} \quad m = \tan \theta$$

حيث  $\theta$  هو قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

\* تصنيف الميل :- سون نغير الضلع الابتدائي "الثابت" هو الاتجاه الموجب لمحور السينات :-



- \* يكون الميل موجباً :- إذا كان المستقيم يصنع زاوية "حادّة" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
- \* يكون الميل سالباً :- إذا كان المستقيم يصنع زاوية "منفرجة" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
- \* يكون الميل صفراً :- إذا كان المستقيم "يوازي" محور "السينات" .
- \* يكون الميل غير معرفاً :- إذا كان المستقيم "يوازي" محور "الصادرات" .

مثال ٥ :- أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب للسينات قياساً :-

$$60^\circ \quad 135^\circ \quad 6^\circ \quad 12^\circ \quad 3^\circ \quad 54^\circ$$

الحل :-

- $2 = \text{طاه} = \text{طاه} 60^\circ = 1 \Rightarrow 1 = 2$
- $2 = \text{طاه} = \text{طاه} 135^\circ = -1 \Rightarrow -1 = 2$
- $2 = \text{طاه} = \text{طاه} 12^\circ \approx 0.21 \Rightarrow 2 \approx 0.21$
- $2 = \text{طاه} = \text{طاه} 3^\circ \approx 0.05 \Rightarrow 2 \approx 0.05$
- $2 = \text{طاه} = \text{طاه} 54^\circ \approx 1.38 \Rightarrow 2 \approx 1.38$

مثال ٦ :- باستخدام الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم

الذي ميله "م" مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث :-

$$-2 = \text{طاه} = 0.54 \quad \text{طاه} = 3.44 \quad -2 = \text{طاه} = 3.44 \quad -2 = \text{طاه} = 3.44$$

الحل :-

$$\Rightarrow \text{shift tan}(0.54) = 3.44$$

$$\text{طاه} = 2 \Rightarrow \text{طاه} = 0.54$$

$$\text{طاه} = 2 \Rightarrow \text{طاه} = 0.54$$

$$\Rightarrow \text{shift tan}(3.44) = 0.54$$

$$\text{طاه} = 2 \Rightarrow \text{طاه} = 3.44$$

$$\text{طاه} = 2 \Rightarrow \text{طاه} = 3.44$$

$$\textcircled{د} \quad 3 = \text{ظاهر} \Leftarrow \text{ظاهر} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

∴ الميل سالب  $\Leftarrow$  > هـ منفرجة

$$\Rightarrow \text{shift tan}(-1/\sqrt{3}) = -30^\circ$$

$$\therefore \text{م (د هـ)} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

مثال ⑤ ∴ أوجد قياس الزاوية الموجبة هـ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (3762) و (3761) (3761)

الحل ∴ ∴

$$\therefore \text{المستقيم يمر بالنقطتين (3762) و (3761)}$$

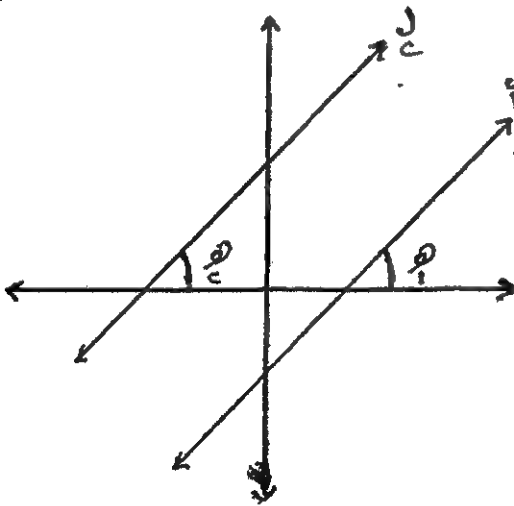
مكتبة وسام  
شويين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بسات  
01004423597.3943035

$$37 = \text{م} \Leftarrow 37 = \frac{3762}{3} = \frac{3762 - 3761}{(2) - 1} = 3 \therefore$$

$$\Rightarrow \text{shift tan}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

$$\therefore \text{م (د هـ)} = 60^\circ$$

\* العلاقة بين ميل المستقيم المتوازيين



المشغل المقابل يوضع أنه المستقيم ل1 و ل2 متوازيان  
ميلهما م1 م2 على الترتيب وعلى ذلك يكون

$$\text{م (د هـ)} = \text{م (د هـ)}$$

$$\therefore \text{ظاهر} = \text{ظاهر} \Leftarrow \text{م} = \text{م}$$

$$\therefore \text{إذا كان ل1 // ل2} \Leftarrow \text{م} = \text{م}$$

$$\therefore \text{شرط توازي مستقيمان هو م1 = م2}$$

مثال ① أثبت أنه المستقيم الذي يمر بالنقطتين (363) و (660) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها 60° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$\text{الحل} \therefore \text{ميل المستقيم الأول م1} = \frac{\text{فرقة الصادات}}{\text{فرقة السينات}} = \frac{6-3}{3-0} = \frac{3}{3} = 1 \Leftarrow \text{م} = 1$$

أ / جميل غالي السيد

ميل المستقيم الثاني  $m_2 = 2 = 1 \leftarrow 1$   $\leftarrow 1$   
 منه ① ، ② ينتج أنه  $m_1 = m_2$   $\therefore$  المستقيمان متوازيان  $\#$

مثال ⑤ :- إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطة  $P(2, 5)$  ،  $Q(1, 3)$  يوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $R(3, 5)$  ،  $S(1, 2)$  أوجد قيمة  $c$  .  
 الحل :-

ميل المستقيم الأول  $m_1 = \frac{5-3}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$   $\leftarrow 1$

ميل المستقيم الثاني  $m_2 = \frac{5-2}{c-1} = \frac{3}{c-1}$   $\leftarrow 2$

$\therefore$  المستقيمان متوازيان  $\therefore m_1 = m_2$   
 $\# \quad 1 = 3 \leftarrow 3 = 2 + c \leftarrow \frac{3}{c-1} = -2$

مثال ③ :- أثبت أن النقطة  $P(3, 1)$  ،  $Q(1, -1)$  ،  $R(0, 5)$  تقع على استقامة واحدة .  
 الحل :-

ميل  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1-5}{1-0} = \frac{-4}{1} = -4$   $\leftarrow 1$

ميل  $\overrightarrow{QR} = \frac{5-1}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4$   $\leftarrow 2$

منه ① ، ② ينتج أنه ميل  $\overrightarrow{PQ} = \text{ميل } \overrightarrow{QR}$

$\therefore$  النقطة  $P, Q, R$  تقع على استقامة واحدة  $\#$

تدريب \* \* \* \*  
 أثبت أن النقطة  $P(5, 2)$  ،  $Q(3, 2)$  ،  $R(1, 1)$  تقع على استقامة واحدة .  
 \* \* \*

مثال ④ :- أثبت أن النقطة  $P(3, 2)$  ،  $Q(7, 2)$  ،  $R(1, -1)$  ،  $S(-1, -2)$  على الترتيب تمثل شبه مربع .

الحل :-

\* شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان

$$\begin{aligned} \text{ميل } P &= \frac{2-3}{3-1} = \frac{1-2}{2-1} \\ \rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2-1}{3-1} = \frac{1-2}{2-1} \\ \rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2-1}{3-1} = \frac{1-2}{2-1} \\ \text{ميل } D &= \frac{1-2}{1+1} = \frac{1-2}{1+1} \end{aligned}$$

∴ ميل  $SP =$  ميل  $CD$  ∴  $SP \parallel CD$  ∴ الشكل  $PCDS$  شبه منحرف #  
∴ ميل  $CP \neq$  ميل  $SD$  ∴  $CP \nparallel SD$

\* \* \* تدريب \* إذا كان المستقيم  $L$  المار بالنقطتين  $(1, 3)$  و  $(6, 5)$  يوازي  
\* \* \* المستقيم  $L$  الذي يصنع زاوية موجبة قياسها  $45^\circ$  مع الاتجاه  
الموجب لاهـ السينات متوازيان فأوجد قيمة  $L$ .

\* العلاقة بين ميل المستقيمين المتعامدين :-

\* إذا كان  $L$  مستقيماً مائلاً  $M$  على القريب  
 $\Leftrightarrow$  إذا كان  $L \perp M \Leftrightarrow m \times m_c = -1$   $\Rightarrow$   $m_c = -\frac{1}{m}$   $\Rightarrow$   $m_c = -\frac{1}{m}$

∴ شرط تعامد مستقيمان هو  $m \times m_c = -1$

مثال ① أثبت أنه المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $(2, 3)$  و  $(6, 5)$  عمودي على  
المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $(1, 5)$  و  $(3, 6)$ .

الحل :-

$$m_c = \frac{1-3}{3-1} = \frac{1-3}{3-1} \quad m = \frac{2-3}{6-2} = \frac{2-3}{6-2}$$

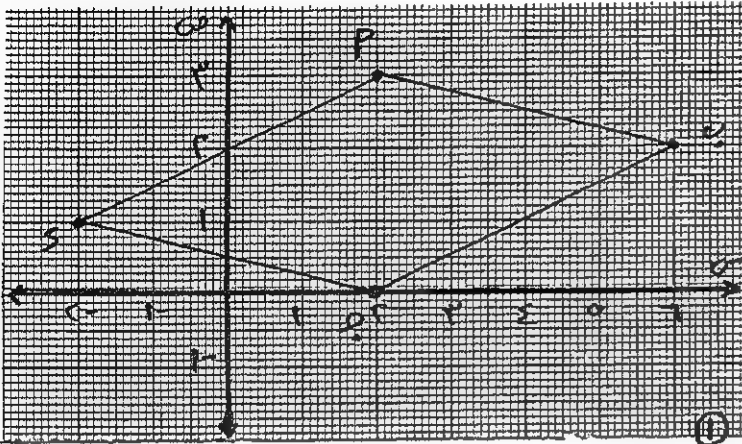
∴  $m \times m_c = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq -1$  ∴ المستقيمان متعامدان #

\* \* \* تثبت \* أنه المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤٣٣٦٤) (٣٧٢٦٥) \* \* \*  
 \* \* \* عمودي على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ٣٠°.

### "ملاحظات عامة لحل مسائل الأشكال الرباعية"

- \* لا بُدَّ أن الشغل الرباعي شبه معروف نثبت أنه :-  
 ضلعين متقابلين فيه متوازيين والضلعا الآخر غير متوازيين.
- \* لا بُدَّ أن الشغل الرباعي متوازي أو ضلعان متقابلان متوازيان أو ضلعان متقابلان متوازيان :-  
 ① كل ضلعين متقابلين متوازيين "عند طريق الميل".  
 ② كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول "عند طريق البعد بغير نقطتين".  
 ③ ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين في الطول.  
 ④ القطران ينصف كل منهما الآخر "عند طريق منتصف قطعة مستقيمة".
- \* لا بُدَّ أن الشغل الرباعي مستطيل أو مربع أو مربع قائم الزاوية أو أولاً أنه هذا الشغل متوازي أو ضلعان متقابلان متوازيين :-  
 • لا بُدَّ أن متوازي أو ضلعان متقابلان متوازيين أو ضلعان متقابلان متوازيين :-  
 ① ضلعان متقابلان فيه متساويان "عند طريق الميل".  
 ② القطران متساويان في الطول "عند طريق البعد بغير نقطتين".
- لا بُدَّ أن متوازي أو ضلعان متقابلان متوازيين أو ضلعان متقابلان متوازيين :-  
 ① ضلعان متقابلان فيه متساويان في الطول.  
 ② القطران متساويان.
- لا بُدَّ أن متوازي أو ضلعان متقابلان متوازيين أو ضلعان متقابلان متوازيين :-  
 ① ضلعان متقابلان فيه متساويان في الطول.  
 ② ضلعان متقابلان فيه متساويان في الطول ومنتصف القطران متساويان.  
 ③ القطران متساويان في الطول ومنتصف القطران متساويان.  
 ④ ضلعان متقابلان فيه متساويان في الطول ومنتصف القطران متساويان في الطول.

مثال ① على مستوى إحداثي متعامد مثل القطر  $P(3, 2)$  ب  $(2, 6)$  ج  $(-6, 0)$ .  
 د  $(-1, 6)$  تم اثبت أن الشكل  $P$  ب ج د متوازي أضلاع.



الحل :-

$$\text{ميل } \overrightarrow{PB} = \frac{2-2}{2-3} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\text{ميل } \overrightarrow{CD} = \frac{6-0}{-1-(-6)} = \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{ميل } \overrightarrow{PC} = \frac{0-2}{-6-3} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{ميل } \overrightarrow{BD} = \frac{6-6}{-1-2} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\text{①} \therefore \text{ميل } \overrightarrow{PB} = \text{ميل } \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

$$\text{②} \therefore \text{ميل } \overrightarrow{PC} = \text{ميل } \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{PC} \parallel \overrightarrow{BD}$$

∴ من ① و ② كل ضلعين متقابلين متوازيين ∴ الشكل  $P$  ب ج د متوازي أضلاع #

مثال ③ :- إذا كان المثلث الذي رؤوسه  $P(3, 2)$  ب  $(2, 6)$  ج  $(-6, 0)$  قائم الزاوية من  $P$  أوجد قيمة  $\sin$  ثم أوجد مساحة المثلث  $P$  ب ج .

الحل :-

$$\therefore \triangle PBC \text{ قائم من } P \therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{PC}$$

$$\text{أي أن } \text{ميل } \overrightarrow{PB} \times \text{ميل } \overrightarrow{PC} = -1$$

$$\text{ميل } \overrightarrow{PB} = \frac{2-2}{2-3} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{ميل } \overrightarrow{PC} = \frac{0-2}{-6-3} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$$

$$\therefore 1 = 0 \times \frac{2}{9} \Rightarrow 1 = \frac{2}{9} \Rightarrow 9 = 2 \Rightarrow \boxed{9=2}$$

$$\text{أو } \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow 1 = 2 \Rightarrow \boxed{1=2}$$

$$\# \text{ مساحة } \triangle PBC = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(-6-2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \quad \overrightarrow{PB} = \sqrt{(2-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$





- ١٦) المستقيمان اللذان ميلهما  $\frac{5}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  يكونان .....  
 ١٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين  $P(0,6)$  و  $Q(2,0)$  والمستقيم الذي يصنع زاوية  $30^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامداً معهما  $PQ \perp$  .....  
 ١٨) أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها  $P = 30^\circ$  و  $Q = 60^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

- ١٩) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله  $2\sqrt{3}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

- ٢٠) أثبت أنه المستقيم المار بالنقطتين  $P(-4,3)$  و  $Q(-3,6)$  عمودي على المستقيم المار بالنقطتين  $S(1,2)$  و  $T(3,4)$ .

- ٢١) أثبت أنه المستقيم المار بالنقطتين  $P(2,1)$  و  $Q(6,3)$  يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها  $60^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

- ٢٢) إذا كان المستقيم  $CD$  يوازي محور السينات حيث  $D(4,2)$  و  $C(5,5)$  فأوجد  $BC$ .

- ٢٣) إذا كان المستقيم  $AB$  يوازي محور الصادات حيث  $B(3,7)$  و  $A(3,5)$  فأوجد  $AC$ .

- ٢٤) إذا كان المستقيم  $LM$  يمر بالنقطتين  $M(3,1)$  و  $N(2,4)$  والمستقيم  $LM$  يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $60^\circ$  فأوجد قيمة  $LM$  إذا كان مستقيماً :-

٢٥) متوازيان  $AB$  و  $CD$  متعامدان

- ٢٦) أثبت أن النقطة  $P(-1,4)$  و  $Q(-2,2)$  تقع على استقامة واحدة.

- ٢٧) إذا كانت النقطة  $P(0,1)$  و  $Q(2,3)$  تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة  $P$ .

- ٢٨) إذا كان  $P(-1,1)$  و  $Q(2,3)$  و  $R(6,0)$  أثبت أن  $PR \perp QR$  قائم الزاوية من  $R$ .

- ٢٩) أثبت أن النقطة  $P(1,1)$  و  $Q(0,4)$  و  $R(4,6)$  هي رؤوس لمثلث الأضلاع  $ABC$  و  $D$ .

- ٣٠) أثبت أن النقطة  $P(5,1)$  و  $Q(1,0)$  و  $R(3,1)$  هي رؤوس المستطيل  $ABCD$ .

- ٣١)  $AB$  و  $CD$  شبه منحرف فيه  $AB \parallel CD$  و  $P(6,2)$  و  $Q(3,0)$  و  $R(3,3)$  و  $S(6,6)$

$AC$  و  $BD$  (٣-٤) أوجد أطرافاً لقطعة  $CD$ .

- ٣٢) أثبت أن النقطة  $P(4,3)$  و  $Q(7,0)$  و  $R(1,2)$  هي رؤوس مثلث وإذا كانت

- نقطة  $S(1,2)$  فأثبت أن الشكل  $ABCD$  شبه منحرف وأوجد النسبة بين طول  $AB$  و  $CD$ .

## (٤) "معادلة الخط المستقيم بملوئية ميله وطول الجزء المقطوع منه محور الصادات"

\* أولًا :- إيجاد ميل المستقيم وطول الجزء المقطوع منه محور الصادات .

↪ \* وإذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة  $MP = 3M + P$  فإنه :-

ميل الخط المستقيم  $M$  ، طول الجزء المقطوع منه محور الصادات  $P$  ،  
والمستقيم يمر بالنقطة (٦٠) .

مثال :- ① المستقيم الذي معادلته  $MP = 3 + 5 - 2$  ميله  $= 2$  ويقطع منه الجزء الموهب لمحور الصادات ٣ وهداة طولية ويمر بالنقطة (٣٦٠) .

⑤ المستقيم الذي معادلته  $MP = 7 - 5 - \frac{1}{5}$  ميله  $= \frac{1}{5}$  ويقطع منه الجزء السالب لمحور الصادات ٧ وهداة طولية ويمر بالنقطة (٧-٦٠) .

↪ \* وإذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة  $P = 5M + 3P + 0$  فإنه :-

ميل الخط المستقيم  $= \frac{\text{معامل } M}{\text{معامل } P} = \frac{P}{5}$  ، طول الجزء المقطوع منه الصادات  $= \frac{\text{الحرة المملعة}}{\text{معامل } P}$

مثال :- ① المستقيم الذي معادلته  $0 = 5 + 3MP + 0$  ميله  $= \frac{5}{3}$  ، طول الجزء المقطوع منه محور الصادات  $\frac{5}{3}$  وهداة طول .

مثال ① :- أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع منه محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :-

$$5C - 0 = MP \quad ③$$

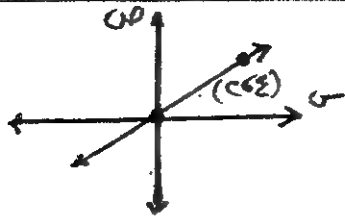
$$9 + 5 - 3 = MP \quad ④$$

$$0 + 5 - \frac{1}{5} = MP \quad ①$$

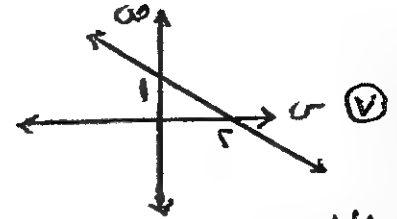
$$1 = MP - 5 - 3 \quad ⑥$$

$$1 + 5 - 2 = MP \quad ⑤$$

$$5 - 6 = MP \quad ②$$



①



المطلوب

- ① ميله  $= \frac{1}{2}$  ، ويقطع جزئاً موجباً من محور الصادات طولها 5 وحدة طول .  
 ② ميله  $= 3$  ، ويقطع جزئاً موجباً من محور الصادات طولها 9 وحدة طول .  
 ③ ميله  $= -2$  ، ويقطع جزئاً موجباً من محور الصادات طولها 5 وحدة طول .  
 ④ ميله  $= 7$  ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات = "أى أنه المستقيم يمر بنقطة لأصل"

⑤ بالقسمة على (2)  $\Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

∴ ميله  $= 2$  ، ويقطع جزئاً موجباً من محور الصادات طولها  $\frac{5}{2}$  وحدة طول .

⑥ نكتب شكل المعادلة  $\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

∴ ميله  $= \frac{-\text{عامل } x}{\text{عامل } y} = \frac{3}{1} = 3$  ، الجزء المقطوع  $= \frac{-\text{الحرة المطلقة}}{\text{عامل } y} = \frac{3}{1} = 3$  ،  $1 = \frac{1}{1} = 1$  وحدة طول

هنا آخر

خبر بالك : مثال ⑦

\* الجزء المقطوع هو -1

بمعنى طول الجزء المقطوع = 1

∴  $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

∴ ميله  $= 3$  ، طول الجزء المقطوع = 1 وحدة طول

⑦ المستقيم يمر بالنقطتين (0,0) و (1,1) (1,0)

∴ ميله  $= \frac{1-0}{1-0} = 1$  ، والجزء المقطوع = 1 "لأنه نقطة التقاطع مع الصادات (1,0)"

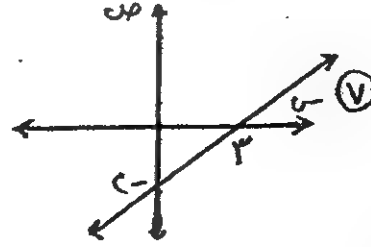
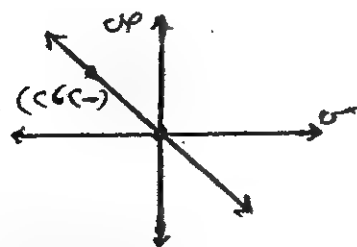
⑧ المستقيم يمر بالنقطتين (0,0) و (1,-1) (0,1)

∴ ميله  $= \frac{-1-0}{1-0} = -1$  ، والجزء المقطوع = 0 "لأنه نقطة التقاطع مع الصادات (0,0)"

\* \* \* تدريب \* \* \* أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :-

①  $2x - 5 = 0$  \* \* \* ②  $7 - 5x = 0$  ③  $5 - 7 = 0$

④  $5 = 0$  ⑤  $7 + 3 = 0$  ⑥  $0 = 0$



مثال ٥ :- اختر الإجابة الصحيحة :-

- ١ ميل المستقيم الذي معادلته  $5x - 7y = 1$  هو .....  $[-3, 3, 6, 7]$
- ٢ إذا كان المستقيمان  $5x + 7y = 0$  و  $5x + 3y = 0$  متعامدان فإن  $k =$  .....  $[-3, 3, 6, \frac{1}{3}]$
- ٣ المستقيم الذي معادلته  $5x^2 - 3y = 0$  يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .....  $[30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ]$
- الإجابة :-

١ ٣ ٥ ٣ ٥ ٤٥

مثال ٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين  $(-7, 1)$  و  $(9, 3)$  محوراً على المستقيم الذي معادلته  $5x + 7y = 13$  فأوجد قيمه  $k$ .

الحل :-

$$\text{ميل المستقيم المار بالنقطتين } (-7, 1) \text{ و } (9, 3) = \frac{3-1}{14-(-7)} = \frac{2}{21}$$

$$\boxed{\frac{2}{21} = k}$$

$$\text{ميل المستقيم الذي معادلته } 5x + 7y = 13 \text{ هو } -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = -\frac{5}{7}$$

$$\boxed{-\frac{5}{7} = k}$$

$$\therefore \text{المستقيمان متعامدان} \iff 1 = k \times \frac{2}{21} = 1$$

$$\# \boxed{\frac{2}{21} = k} \iff 2 = k \times 21 \iff 1 = \frac{k}{2} \iff 1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{21} \iff \boxed{\frac{2}{21} = k}$$

\* تانياً :- إيجاد معادلة الخط المستقيم بملوئية ميله ومحول الجزء المقطوع منه محور الصارآن.

\* المستقيم الذي ميله  $(m)$  والجزء المقطوع منه محور الصارآن  $(p)$  أي يمر بالنقطة  $(0, p)$  تكون معادلته على الصورة :-  $\boxed{y = mx + p}$

مثال ① أكتب معادلة المستقيم الذي :-

⑤ ميله = 5 ولقطع جزئاً موجباً مع محور الصادات فوله 6 ووجهة طول .

⑥ ميله = -5 والجزء المقطوع هو -2 .

⑦ ميله = 2 ويمر بنقطة الأهل .

⑧ يصنع زاوية قياسها 30° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والجزء المقطوع هو 2  
الخط :-

⑤  $2 = m, 0 = b, 6 = p \Rightarrow p + 5m = 6 \Rightarrow 6 + 5 \cdot 2 = 16 \Rightarrow 16 = 6 + 5 \cdot 2$

⑥  $2 = m, -2 = b, 0 = p \Rightarrow p + 5m = -2 \Rightarrow 0 + 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 10 = -2 + 5 \cdot 2$

⑦  $2 = m, 0 = b, 0 = p \Rightarrow p + 5m = 0 \Rightarrow 0 + 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 10 = 0 + 5 \cdot 2$

⑧  $2 = m, 1 = b, 0 = p \Rightarrow p + 5m = 1 \Rightarrow 0 + 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 10 = 1 + 5 \cdot 2$

في ملاحظات هامة

① معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأهل (0,0) هي "  $m = 0$  " حيث  $m$  هو الميل .

② معادلة محور السينات هي "  $m = 0$  " ، بينما معادلة محور الصادات هي "  $s = 0$  " .

③ معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (0,1) هي "  $m = 1$  " .

④ معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (0,0) هي "  $s = 0$  " .

⑤ لإيجاد الجزء المقطوع مع محور الصادات من أي معادلة نضع  $s = 0$  . ونأخذ

بقية  $m$  فنكون نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (0,.....) .

⑥ لإيجاد الجزء المقطوع مع محور السينات من أي معادلة نضع  $m = 0$  . ونأخذ

بقية  $s$  فنكون نقطة التقاطع مع محور السينات هي (.....,0) .

⑦ يكون المستقيمان متوازيين إذا ضرب معامل  $s$  ومعامل  $m$  في عدد ثابت مثل :-

$s + m = 0 \Rightarrow 5 + 2 = 7 \Rightarrow 7 = 5 + 2$   $8 = 2 + 5 \Rightarrow 8 = 2 + 5$   $6 = 3 - 5 \Rightarrow 6 = 3 - 5$   $1 = 3 - 5 \Rightarrow 1 = 3 - 5$

⑧ يكون المستقيمان متطابقين إذا ضربت جميع حدود المعادلتان في عدد ثابت مثل :-

$3 = 5 + 2 \Rightarrow 6 = 10 + 4 \Rightarrow 6 = 10 + 4$

مثال ⑤ :- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١-٦) و (٢-٢)   
 الحل :-

نفرض أنه معادلة المستقيم تكون على الصورة  $ax + by = c$

$$3 = m = \frac{\text{فرجه الصادات}}{\text{فرجه السينات}} = \frac{1+2}{1-2} \Rightarrow \boxed{3 = m}$$

:- تصبح معادلة المستقيم على الصورة  $ax + by = c$   $3x + y = 7$  ←

:- (١-٦)  $\in$  للمستقيم  $\therefore$  تحقق معادلته  $\therefore$  بالتعويض بالنقطة من  $\rightarrow$

$$3x + y = 7 \Rightarrow 3(1) + (-6) = 7 \Rightarrow 3 - 6 = 7 \Rightarrow -3 = 7 \Rightarrow \boxed{-3 \neq 7}$$

:- عند  $\rightarrow$  معادلة الخط المستقيم لها  $\# \boxed{3x - y = 7}$

مثال ⑥ :- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٥-٢) ويوازي المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{2}$    
 ب- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤-٥) وعمودي على المستقيم  $3x - y = 7$

الحل :-

⑥ :- ميل المستقيم المعطى =  $\frac{1}{2}$   $\therefore$  ميل المستقيم المطلوب =  $\frac{1}{2}$  "لأنه متوازيان"

:- تصبح المعادلة على الصورة  $ax + by = c$   $3x + y = 7$  ←

:- المستقيم يمر بالنقطة (٥-٢)  $\therefore$  تحقق معادلته

:- بالتعويض بالنقطة من المعادلة  $\rightarrow$

$$3x + y = 7 \Rightarrow 3(5) + (-2) = 7 \Rightarrow 15 - 2 = 7 \Rightarrow 13 = 7 \Rightarrow \boxed{13 \neq 7}$$

:- معادلة المستقيم لها  $\# \boxed{3x - y = 7}$

⑦ :- ميل المستقيم المعطى =  $\frac{2}{3}$   $\therefore$  ميل المستقيم المطلوب =  $-\frac{3}{2}$  "لأنه متعامدان"

:- تصبح المعادلة على الصورة  $ax + by = c$   $3x + y = 7$  ←

:- المستقيم يمر بالنقطة (٤-٥)  $\therefore$  تحقق معادلته

٢٠ بالتعويض بالنقطة في المعادلة

$$\begin{aligned} 2 &= 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 2 \Leftrightarrow 0 \times \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow 0 = 2 \\ \therefore \text{معادلة المستقيم هي } &\boxed{2 + 0 = 0} \end{aligned}$$

\* \* \* ١٠ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١-٦) ويوازي المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{3}$  \* \* \*

\* ١١ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١٦٠) وعمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٦-٤) و (١٦١) \* \*

مثال ٢: أوجد الجزء المقطوع منه محور الصادات وكذلك الجزء المقطوع منه محور السينات في المعادلة  $7 = 0.3x + 0.2y$  الحل:

• لإيجاد الجزء المقطوع منه محور الصادات نضع  $x = 0$  في المعادلة  
 $\therefore 7 = 0.3x + 0.2y \xrightarrow{(3)} 7 = 0 \xrightarrow{(3)} \boxed{y = 3.5}$   $\therefore$  نقطة التقاطع مع محور الصادات هي (٠، ٣.٥)

• لإيجاد الجزء المقطوع منه محور السينات نضع  $y = 0$  في المعادلة  
 $\therefore 7 = 0.3x + 0.2y \xrightarrow{(2)} 7 = 0.3x \xrightarrow{(2)} \boxed{x = 23.3}$   $\therefore$  نقطة التقاطع مع محور السينات هي (٢٣.٣، ٠)

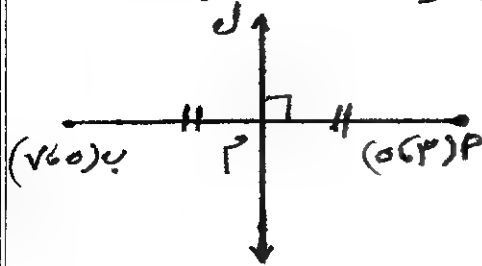
ملحوظة: المعادلة التي على الصورة  $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  هذه آخر

- \* طول الجزء المقطوع منه محور السينات هو  $a$  ويمر بالنقطة (٠، ١)
- \* طول الجزء المقطوع منه محور الصادات هو  $b$  ويمر بالنقطة (١، ٠)

$$\therefore \text{المعادلة هي } 7 = 0.3x + 0.2y \xrightarrow{(7)} \boxed{1 = \frac{x}{23.3} + \frac{y}{3.5}}$$

- $\therefore$  طول الجزء المقطوع منه محور السينات هو ٢٣.٣ ويمر بالنقطة (٢٣.٣، ٠)
- $\therefore$  طول الجزء المقطوع منه محور الصادات هو ٣.٥ ويمر بالنقطة (٠، ٣.٥)

مثال ٥ أوجد معادلة محور التماثل للقطعة المستقيمة  $\overline{AB}$  حيث  $P(3, 5)$  و  $B(0, 7)$  الحل :-



:- محور تماثل القطعة المستقيمة : هو المستقيم العمودي على  $\overline{AB}$  وينصفه .  
:- نريد إيجاد معادلة المستقيم  $l$  .  
:- نوجد إحداثي منتصف  $\overline{AB}$  ونكتبه  $M$

$$M(1.5, 3) = \left( \frac{0+3}{2}, \frac{5+7}{2} \right) = (1.5, 3)$$

:- ميل  $\overline{AB} = \frac{7-5}{0-3} = -\frac{2}{3}$  :- ميل العمودي عليه "المستقيم  $l$ " = 1

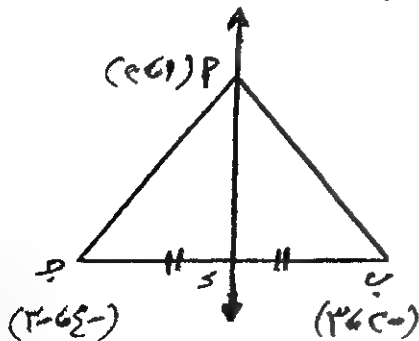
:- معادلة  $l$  هي  $y - 3 = 1(x - 1.5)$   $\Rightarrow y = x + 1.5$

:- النقطة  $M(1.5, 3)$  تقع على المستقيم  $l$  :- تحقق معادلته .  
:- بالتعويض بالنقطة  $M$  في  $y = x + 1.5$   $\Rightarrow 3 = 1.5 + 1.5$   $\Rightarrow 3 = 3$

:- معادلة المستقيم  $l$  "معادلة محور التماثل" هي  $y = x + 1.5$

\* \* \*  
\* تدريب \*  
\* \* \*

مثال ٦ :-  $P$  و  $B$  مثلث رؤوسه النقطة  $P(1, 2)$  ،  $B(-3, 3)$  ،  $A(-6, 2)$   $\overline{AB}$  متوسط فيه أوجد معادلة المستقيم المار بالمتوسط  $\overline{AB}$  .



الحل :-  
:-  $\overline{AB}$  متوسط في  $\triangle PAB$  :-  $M$  منتصف  $\overline{AB}$

$$M(-4.5, 2.5) = \left( \frac{-6-3}{2}, \frac{2+3}{2} \right)$$

:- ميل المستقيم المار بالنقطة  $P(1, 2)$  و  $M(-4.5, 2.5)$

$$m = \frac{2-2.5}{1-(-4.5)} = \frac{-0.5}{5.5} = -\frac{1}{11}$$

:- معادلة المستقيم هي  $y - 2 = -\frac{1}{11}(x - 1)$

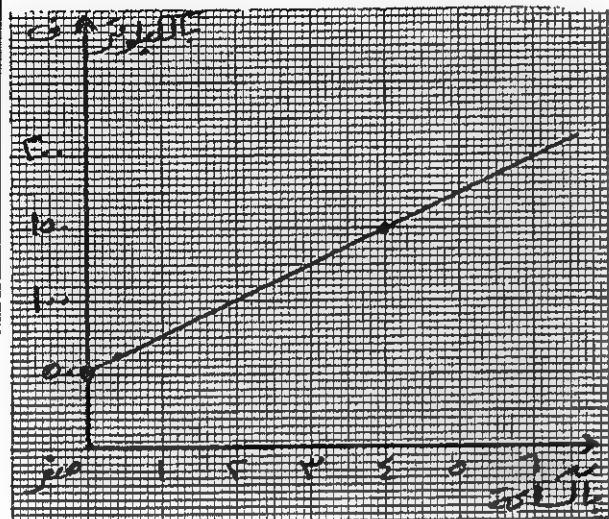


١١- المستقيم يمر بالنقطة  $P(261)$  :- أحقق معادلته .

١٢- بالتعويض بالنقطة  $P$  في المعادلة

$$2 \Leftarrow 261 + 1 \times \frac{1}{2} = 2 \Leftarrow 261 + \frac{1}{2} = 2 \Leftarrow \frac{1}{2} = 2 - 261$$

١٣- المعادلة هي  $\frac{1}{2}x + 5y = 50$



مثال ١٤ :- الشغل المقابل يبدل حركة سيارة  
تسير بسرعة منتظمة حيث المسافة (ف)  
والزمن (ن) أوجد :-

- ١- المسافة عند بدء الحركة .
  - ٢- سرعة السيارة .
  - ٣- معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة .
- الحل :-

١- المسافة عند بدء الحركة = ٥٠ كم .

٢- سرعة السيارة = ميل الخط المستقيم

نأخذ أي نقطتين على الخط المستقيم ونأخذ (٥٠، ٠) و (١٥٠، ٦)

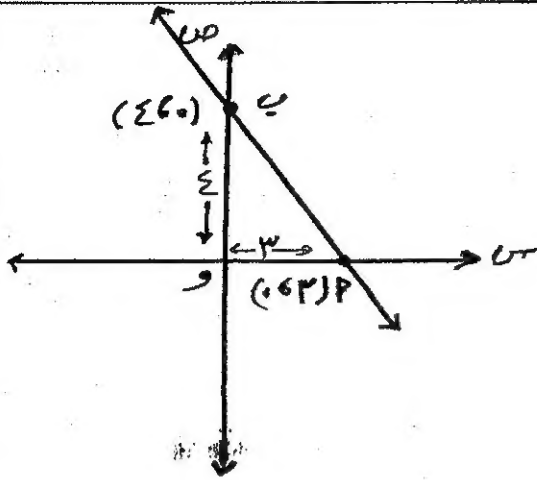
٣- معادلة الخط المستقيم هي  $f = 2n + 50$  .

٣- معادلة الخط المستقيم هي  $f = 2n + 50$  .

مثال ١٥ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع محور الإحداثيات السينية والصادية  
جزءه موجب يسير طولها ٤٦٣ وحدات طولية على الترتيب . ثم أوجد  
مساحة المثلث الملتصق بجزءه الموجب المستقيم ومحور الإحداثيات .

الحل :-

١- المستقيم يقطع محور السينات ٣ وحدات في المستقيم يمر بالنقطة (٠، ٦٣)  
٢- المستقيم يقطع محور الصادات ٤ وحدات في المستقيم يمر بالنقطة (٤٦٣، ٠)



∴ المستقيم يمر بالنقطة (0, 4) و (4, 0)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

∴ المعادلة هي  $x + y = 4$

$$\# \left[ \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \right] \Rightarrow x + y = 4$$

∴ مساحة  $\triangle POB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$  وحدة مربعة #

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ وحدة مربعة } \#$$

تأريده على "معادلة المستقيم بعلومية ميله وطول الجزء المقطوع منه محور الصادات"

II آمل ما يأتي :-

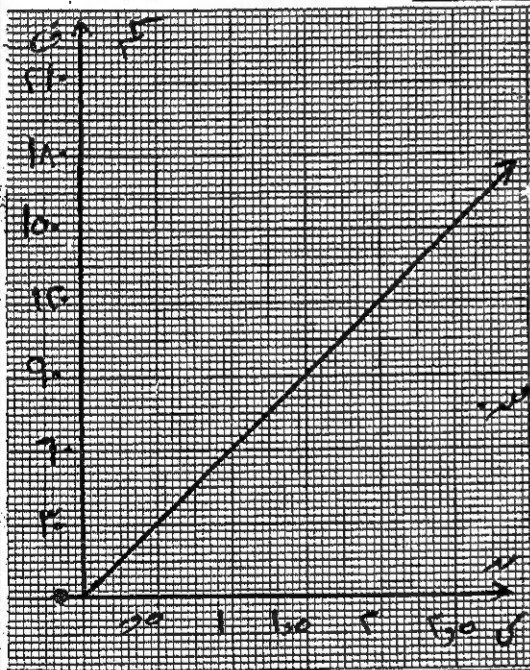
- ① المستقيم  $x + y = 4$  ميله ..... والجزء المقطوع منه محور الصادات هو .....
- ② المستقيم الذي ميله 2 وقطع منه محور الصادات السالب جزئاً طوله 4 يكون معادلته .....
- ③ وإذا كان المستقيم  $x + y = 4$  يمر بنقطة الأصل فإنه  $y = 4 - x$  .....
- ④ المستقيم الذي ميله -1 ويمر بنقطة الأصل معادلته هي .....
- ⑤ المستقيم  $x + y = 4$  ميله 3 - 2 = 1 .....
- ⑥ المستقيم  $x + y = 4$  ميله 1 .....
- ⑦ المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0, 4) و (4, 0) ميله (1 - 3) = -2 .....
- ⑧ المستقيم  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$  ميله 1 .....
- ⑨ المستقيم  $x + y = 4$  ميله ..... ويكون موازياً لمحور .....
- ⑩ المستقيم  $x + y = 4$  ميله ..... ويكون موازياً لمحور .....
- ⑪ وإذا كان المستقيم  $x + y = 4$  ميله 3 - 2 = 1 ..... متوازيًا فإنه له ..... = 1
- ⑫ وإذا كان المستقيم  $x + y = 4$  ميله 3 - 2 = 1 ..... فإنه له ..... = 1
- ⑬ وإذا كانت (0, 4) تقع على المستقيم  $x + y = 4$  فإنه  $y = 4 - x$  .....
- ⑭ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (1, 6) ميله 3 هي .....



١٦.  $P$  هي مصدر،  $M$  نقطة تقاطع قطريتين حيث  $P(361)$  و  $M(6)$  أو جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $P$  و  $M$ .

١٧. مستقيم معادلته  $5x - 3y = 3$ ، أو جد ميله وطول الجزء المقطوع عن محور الصادات واسم هذا المستقيم.

١٨. من الشكل المقابل:-  
النقطة  $B$  منتصف  $AP$  حيث  $B(2, 4)$   
١. أو جد إحداثي كل من:  $P$  و  $A$ .  
٢. أو جد طول كل من:  $AP$  و  $AB$  و  $BP$ .  
٣. أو جد ميل كل من:  $AP$  و  $AB$  و  $BP$ .  
٤. أو جد معادلة كل من:  $AP$  و  $BP$ .



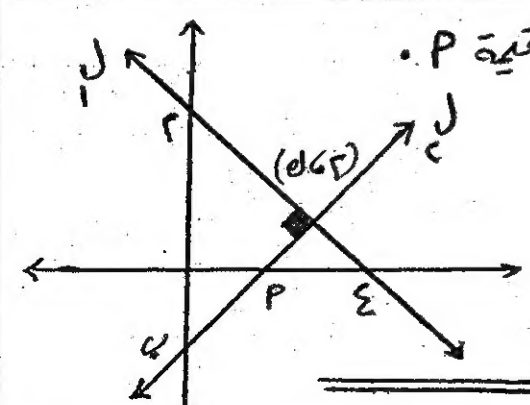
١٩. الشكل المقابل :- يُمثل العلاقة بين المسافة التي تقطعها سيارة والزمن الذي قطعت فيه المسافة أو جد:-  
١. المسافة المقطوعة بعد ٩٠ دقيقة  
٢. الزمن الذي قطعت فيه السيارة ١٥٠ كم  
٣. سرعة السيارة  
٤. معادلة الخط المستقيم الذي يُمثل العلاقة بين المسافة والزمن.

٢٠. الجدول المقابل يُمثل علاقة خطية.  
أو جد:-

س	١	٢	٣
$y = 3x + p$	١	٣	$p$

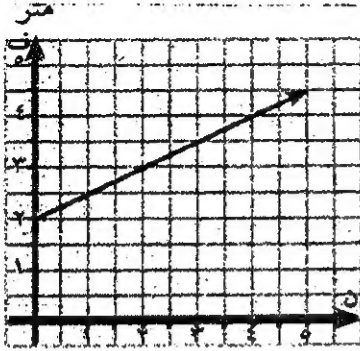
١. معادلة الخط المستقيم.

٢. طول الجزء المقطوع عن محور الصادات.  $P$  أو جد قيمة  $P$ .



٣. أو جد معادلة كل من:  
١. أو جد معادلة  $L_1$ .  
٢. أو جد معادلة  $L_2$ .  
٣. أو جد إحداثي النقطتين  $P$  و  $B$ .

اختبار الوحدة



الشكل المقابل :

يمثل حركة جسم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة (ف) مقاسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية؛ أوجد :  
المسافة عند بدء الحركة .

سرعة الجسم .

معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسم .

المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .

الزمن الذي يقطع فيه الجسم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة .

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

المستقيم الذي معادلته  $s = 3t - 6$  يقطع من محور الصادات جزءاً طوله :

٦- ٢- ٣- ٤-

إذا كان المستقيمان  $s = 4t - 3$  و  $s = 3t - 4$  متعامدين فإن ك =

٤- ٣- ٢- ١-

إذا كان المستقيمان  $s + 5 = 0$  و  $s + 2 = 0$  متوازيين فإن ك تساوى :

٢- ١- ٠- ١٢-

مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات  $s = 4t - 12$  و  $s = 0$  و  $s = 0$  يساوى :

٦- ٧- ١٢- ٥-

أ ب مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥) و (٥، ٢)؛ أى من النقط التالية  $\Rightarrow$  أ ب

(٦، ١) (٣، ٢) (٠، ٠) (٤، ٣)

إذا كان أ (٥، ٣) ب (٢، ١) ج (٣، ٥) فإن إحداثي نقطة ج التي تجعل  $\triangle$  أ ب ج قائم الزاوية في ب هي :

(١، ٦) (٥، ٤) (٢، ٣) (٢، ٨)

أ (٥، ٦) ب (٣، ٧) ج (١، ٣)؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف ب ج .

أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على أ ب من نقطة منتصفها حيث أ (٣، ١) ب (٥، ٣) .

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، ٥) ويوازي المستقيم  $s + 2 = 7$  .

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢) و (٢، ١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل :

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السني والصادي جزئين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب .

أ ب ج مثلث فيه أ (١، ٢) ب (٥، ٢) ج (٣، ٤) د منتصف أ ب، رسم د هـ // ب ج و يقطع

أ ج في هـ؛ أوجد معادلة المستقيم د هـ .

” مع أطيب التمنيات بالنجاح والتفصيل ”

” تمت بحمد الله ”